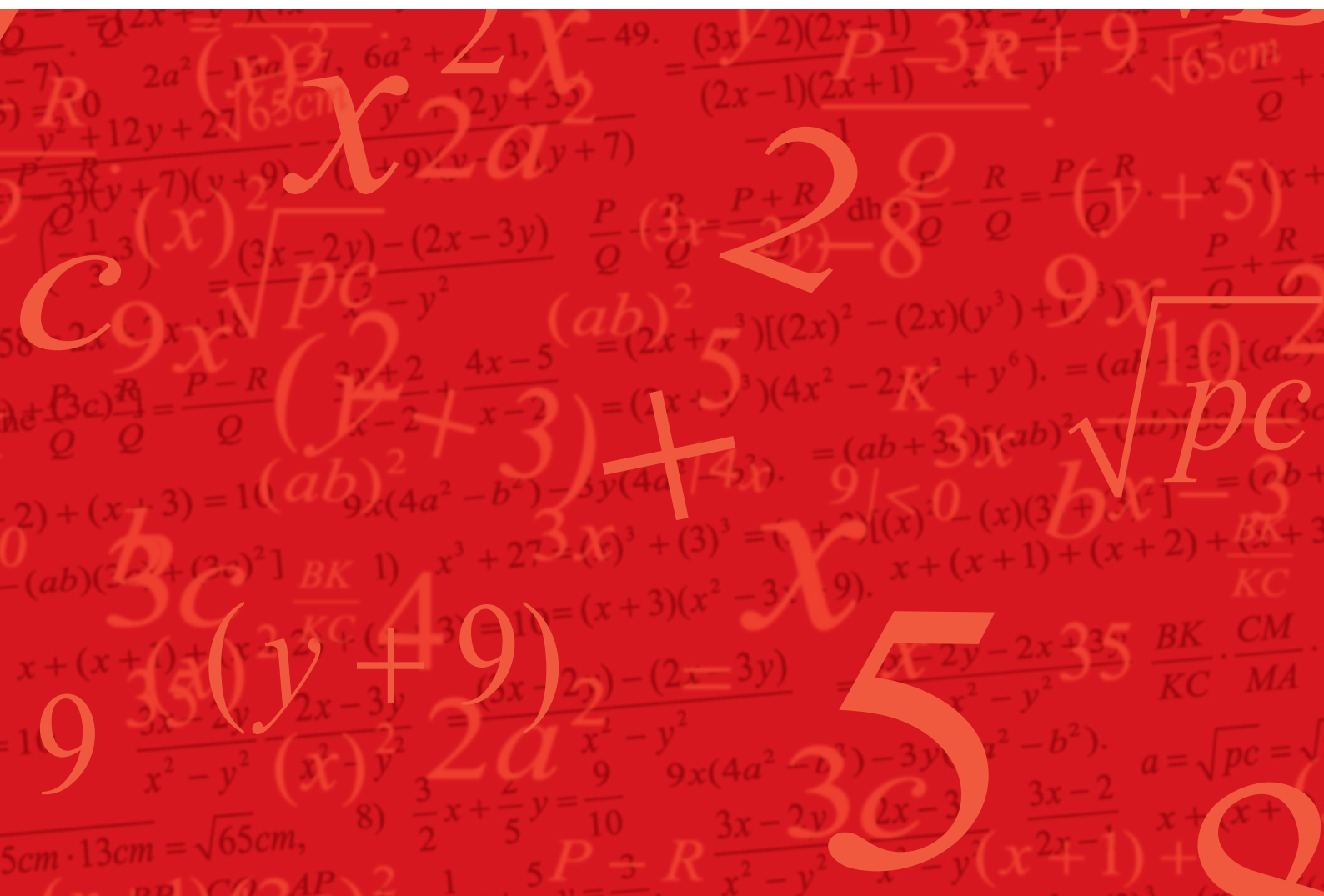




Republika e Kosovës
Republika Kosova – Republic of Kosovo
Qeveria - Vlada - Government

Ministria e Arsimit, Shkencës, Teknologjisë dhe Inovacionit
Ministarstvo obrazovanja, nauke, tehnologije i inovacije
Ministry of Education, Science, Technology and Innovation



Matematika dhe mësimdhënia e matematikës

Udhëzues për klasat 1 - 5



Fakulteti i Edukimit



Ministria e Arsimit, Shkencës, Teknologjisë dhe Inovacionit

Matematika dhe mësimdhënia e matematikës

Udhëzues për klasat 1 - 5

Falënderim

Ky material është zhvilluar dhe publikuar për herë të parë nga Qeveria Gjermane përmes Deutsche Gesellschaft für Internationale Zusammenarbeit (GIZ) GmbH.

Teksti origjinal në gjuhën Shqipe [2012]

E drejta për përdorim, riprodhim dhe redaktim i është bartur Universitetit të Prishtinës – Fakultetit të Edukimit dhe Institutit për Hulumtime dhe Zhvillim të Arsimit [2023]

Përmbajtja e tekstit origjinal është përgjegjësi e autorëve dhe jo domosdoshmërisht pasqyron opinionin zyrtar të Deutsche Gesellschaft für Internationale Zusammenarbeit (GIZ) GmbH apo të Qeverisë Gjermane.

Autorët:

Dr.sc. Qamil Haxhibeqiri, Mr.sc. Melinda Mula, Mr.sc. Ramadan Limani, mbështetur nga Dr. Joachim Schroeder

Koordinuar nga:

Rrezearta Zhinipotoku – Behluli, GIZ

Dizajni dhe faqosja nga:

Envinion

Prill 2012, Prishtinë



Implemented by

giz Deutsche Gesellschaft
für Internationale
Zusammenarbeit (GIZ) GmbH

Përmbajtja

I. Bashkësitë dhe veprimet me to.....	12
1.1. Kuptimi i bashkësisë. Elementet e bashkësisë.....	12
1.2. Nënbashkësia. Bashkësitë e barabarta.....	16
1.3. Veprimet me bashkësi.....	19
1.4. Çifti i renditur. Prodhimi i drejtpërdrejtë (kartezian) i bashkësive.....	26
1.5. Parimi i përfshirje - përjashtimit (për ata që duan të dinë më shumë).....	29
1.6. Relacionet.....	32
II. Numrat natyrorë dhe veprimet me ta.....	36
2.1. Kuptimi i numrit natyror dhe numërorit.....	36
2.2. Krahësimi i numrave natyrorë dhe renditja e tyre.....	37
2.1. Krahësimi i dy numrave të shkruar (numërorëve).....	39
2.1.1. Njëri nga numrat ka më shumë shifra se tjetri.....	39
2.1.2. Dy numrat kanë numër të njëjtë shifrash.....	39
2.1.3. Shkrimi dhe leximi i numrave (numërorëve).....	40
2.1.4. Veprimet me numra natyrorë.....	43
2.1.4.1. Mbledhja.....	43
2.1.4.2. Zbritja.....	45
2.1.4.3. Shumëzimi.....	49
2.1.4.4. Fuqizimi.....	54
2.1.4.5. Pjesëtimi.....	55
2.1.4.5.1. Pjesëtimi pa mbetje.....	55
2.1.4.5.2. Pjesëtimi me mbetje.....	57
2.1.4.5.3. Vetë të pjesëtimit.....	57
2.1.4.6. Shumëfishi më i vogël i përbashkët dhe pjesëtuesi më i madh i përbashkët.....	61
2.1.4.7. Shprehjet numerike. Radha e kryerjes së veprimeve.....	64
2.1.4.7.1. Vlera e shprehjes numerike. Radha e kryerjes së veprimeve.....	65
2.1.4.8. Zbatime. Ekuacionet dhe inekuacionet.....	66
2.1.4.8.1. Zgjidhja e ekuacioneve të formave $x + b = c$, $x - b = c$, $a - x = c$	67
2.1.4.8.2. Zgjidhja e ekuacioneve të formave $ax = b$, $x : a = b$, $a : x = b$, $ax \pm b = c$, $x : a \pm b = c$, $a : x \pm b = c$	70
2.1.4.8.3. Zgjidhja e inekuacioneve të formave $ax \pm b < c$, $a - bx < c$, $ax \pm b > c$, $a - bx > c$	74
2.1.4.9. Vargjet numerike.....	78
III. Thyesat.....	81
1. Kuptimi i thyesës.....	81
2. Disa raste të veçanta të thyesave.....	86
2.1. Thyesat me numërues 0.....	86
2.2. Thyesat me emërues 0.....	86
2.3. Thyesat me emërues 1.....	86
2.4. Thyesat me emërues dhe numërues të barabartë.....	87
2.5. Thyesa të anasjellta (inverse).....	87
4. Krahësimi i thyesave. Disa lloje të thyesave.....	92
4.2. Numrat e përzier (për ata që duan të dinë më shumë).....	93
4.3. Krahësimi i thyesave me emërues të njëjtë si dhe i thyesave me numërues të njëjtë.....	95
4.4. Krahësimi i thyesave me emërues të ndryshëm.....	96
5. Veprimet me thyesa.....	99
5.1. Mbledhja dhe zbritja e thyesave.....	99
5.1.1. Mbledhja dhe zbritja e thyesave me emërues të njëjtë.....	99

5.1.2. Mbledhja dhe zbritja e thyesave me emërues të ndryshëm.....	101
5.2. Shumëzimi dhe pjesëtimi i thyesave.....	103
IV. Matja dhe masat.....	109
1. Matja e vijave	111
2. Matja e sipërfaqeve.....	117
3. Matja e trupave	123
V. Gjeometria	128
Hyrje	128
5.1. Kuptimet themelore të Gjeometrisë.....	129
5.2. Pohimet themelore dhe ato të nxjerra të Gjeometrisë.....	130
5.3. Aksiomat e incidencës (lidhjes)	131
5.4. Aksioma e paraleleve.....	136
5.5. Këndet dhe llojet e tyre. drejtëzat normale.....	139
5.6. Vija e thyer në rrafsh të. Shumëkëndëshat	141
5.6.1 Trekëndëshi.....	142
5.6.2. Katërkëndëshi dhe llojet e tij.....	144
5.6.3. Simetria boshtore.....	145
5.6.4. Rrethi.....	146
5.6.5. Trupat gjeometrikë.....	147
5.6.5.1 Sfera.....	147
5.6.5.2. Kubi Dhe Kuboidi.....	148
5.6.5.3. Cilindri dhe Koni.....	148
5.6.5.4. Piramida.....	149
VI. Puna me të dhëna.....	150
6.1 Numërimi dhe klasifikimi i të dhënave.....	150
6.2 Paraqitja e të dhënave në mënyrë grafike (me diagrame)	151
6.3 Moda e të dhënave.....	158
6.4. Mesi aritmetik i të dhënave	160
VII. Matematika dhe mësimdhënia e matematikës.....	163
7.1. Mësimdhënia e suksesshme.....	167
7.2. Matematika në Kornizën e Kurrikulit.....	169
7.3. Përgatitja e orës mësimore	170
7.5. Struktura ERR e organizimit të orës mësimore.....	175
7.6. Aktivitetet dhe procedurat e mësimdhënies dhe të nxënësve.....	176
7.7. Të nxënësve aktiv.....	176
7.8. Pyetjet, detyrat, problemet matematikore.....	179
7.9. Vlerësimi i të nxënësve të nxënësve.....	182
7.10. Testi – Instrument vlerësimi	183
7.11 Këshilla për mësimdhënies për të inkurajuar nxënësit për të mësuar lëndën e matematikës.....	188
7.12 Një formë e komunikimit efektiv	190
7.13 Forma për përgatitjen e mësimit model.....	191
VIII. Modele mësimi për matematikë për klasat 1-5	192
Klasa: I.....	192
Zhvillimi i mësimit.....	192
Klasa: I.....	195
Zhvillimi i mësimit.....	195
Klasa: II.....	197

Zhvillimi i mësimit.....	197
Klasa: II	200
Zhvillimi i mësimit.....	200
Klasa: III.....	202
Zhvillimi i mësimit.....	202
Klasa: III	205
Zhvillimi i mësimit.....	205
Klasa: III	207
Zhvillimi i mësimit.....	207
Klasa: IV.....	210
Zhvillimi i mësimit.....	210
Klasa: IV.....	213
Zhvillimi i orës	213
Klasa: IV.....	216
Zhvillimi i mësimit.....	216
Klasa: V	219
Zhvillimi i mësimit.....	219
Klasa: V	223
Zhvillimi i orës	223
Literatura	230

Hyrja

Matematika na rrethon nga çdo anë. Që në fëmijërinë e hershme, ende pa filluar shkollimin, të gjithë njerëzit ballafaqohen me shumë koncepte, nocione dhe veprime matematikore, të cilat u ndihmojnë atyre të zgjidhin probleme të ndryshme në jetën reale. Të numëruarit, krahasimi i sasive, veprimet e mbledhjes dhe të zbritjes që realizohen gjatë blerjeve, zbatimi i algoritmeve për kryerjen e veprimeve të mbledhjes dhe zbritjes, si dhe veprimeve në lojëra të ndryshme, llogaritjet e rezultateve për të caktuar fituesin, identifikimi i formave dhe trupave të ndryshëm gjeometrikë etj., janë vetëm disa nga veprimet matematikore me të cilat ballafaqohet secili fëmijë që në fazat e hershme të zhvillimit të tij.

Me fillimin e shkollimit, të gjitha këto veprime fillojnë të kristalizohen në lëndën e matematikës dhe të përdoren për të kuptuar nocione dhe veprime të reja. Qasja sistematike dhe e strukturuar e lëndës së matematikës ndihmon nxënësit që të kuptojnë më lehtë edhe lëndët e tjera, si dhe të zgjidhin pa vështirësi probleme nga jeta reale. Kjo i jep peshë nevojës që tek nxënësit të kultivohet dëshira për ta mësuar matematikën që në shkollën fillore, në mënyrë që kjo t’iu shërbejë në shkollimin e mëvonshëm dhe në jetë.

Duke pasur parasysh që shkollimi fillor në Kosovë është shndërruar nga shkollimi 4 vjeçar në atë 5 vjeçar pa bërë paraprakisht një përgatitje adekuate të mësimdhënësve klasorë për lëndën e matematikës, si dhe duke ditur se ekziston një heterogjenitet për sa i takon kualifikimit të mësimdhënësve klasorë, Agjencia Gjermane për Bashkëpunim Ndërkombëtar (GIZ) në bashkëpunim me Qendrën për Arsimit të Kosovës (KEC) identifikuan nevojën për përgatitjen e një programi të trajnimit “Matematika dhe mësimdhënia e matematikës për klasat 1-5”, me anë të të cilit do të bëhej aftësimi i mësimdhënësve klasorë për të sqaruar sa më mirë nocionet matematikore nxënësve të shkollave fillore, si dhe mënyrat efikase të zgjidhjes së problemeve në këtë lëndë. Një iniciativë e tillë e GIZ dhe KEC u mirëprit nga Ministria e Arsimit, Shkencës dhe Teknologjisë (MASHT), sepse u pa qartë se programi i tillë do të ishte njëri nga programet me karakter të theksuar lëndor për zhvillimin profesional të mësimdhënësve në Kosovë.

Për të përgatitur një program cilësor që do t’u shërbente nevojave të mësimdhënësve, GIZ në bashkëpunim me KEC organizuan një punëtori me ekspertë të lëndës së matematikës, mësimdhënës klasorë, drejtorë shkollash dhe prindër në të cilën identifikuan problemet me të cilat ballafaqohen mësimdhënësit klasorë në shtjellimin e temave të caktuara në lëndën e matematikës. Nga punëtorja doli sugjerimi që programi i trajnimit “Matematika dhe mësimdhënia e matematikës për klasat 1-5” duhet të përmbajë dy pjesë: pjesën përmbajtësore (akademike) nga lënda e matematikës për shkak të nevojës së disa mësimdhënësve që të kristalizojnë njohuritë rreth koncepteve dhe veprimeve matematikore, si dhe pjesën metodologjike, e cila do të udhëzojë mësimdhënësit për përdorimin e metodave, teknikave dhe strategjive të reja gjatë shtjellimit të temave të ndryshme në këtë lëndë. Pikërisht, për të plotësuar nevojat e të gjithë mësimdhënësve klasorë për të sqaruar me sukses temat e ndryshme në matematikë, si nga aspekti përmbajtësor (akademik) ashtu edhe nga aspekti metodologjik, është përgatitur udhëzuesi që keni në dorë “Matematika dhe mësimdhënia e matematikës për klasat 1-5”.

Ky udhëzues fillon me pjesën akademike, e cila përmban 6 kapituj të renditur në mënyrë sistematike duke filluar nga bashkësitë, numrat natyrorë, thyesat, matjet e masat dhe duke përfunduar me pjesën e gjeometrisë dhe punën me të dhëna. Kjo është bërë me qëllim që në udhëzues të përfshihen të gjithë kapitujt që janë përcaktuar në Kornizën e Kurrikulës së re të Kosovës. Shtjellimi i temave në kuadër të kapitujve është bërë në mënyrë të kujdesshme duke marrë shembuj të shumtë dhe detyra të llojllojshme me qëllim të konkretizimit sa më të madh të koncepteve të prezantuara. Po ashtu, janë përdorur edhe figura, tabela, diagrame dhe grafikë që kanë për qëllim të bëjnë të dukshëm informacionin e paraqitur dhe të ndihmojnë në zgjidhjen sa më të lehtë të detyrave të ndryshme. Autorët janë kujdesur që në shtjellimin e temave të zgjedhin shembuj nga jeta reale të

cilat janë në përputhje me interesimet e nxënësve në këtë moshë. Në disa raste autorët kanë shtuar edhe ndonjë temë interesante, e cila u dedikohet atyre që kanë interes të mësojnë më shumë në matematikë dhe që temat e tilla mund t'i punojnë me nxënësit e tyre gjatë aktiviteteve extra-kurrikulare.

Pjesa e dytë e udhëzuesit përfshin aspektin metodologjik të shtjellimit të lëndës së matematikës. Kjo pjesë në fillim përmban informacion të përgjithshëm lidhur me metodologjinë bashkëkohore të mësimdhënies dhe të të nxënësve, si dhe karakteristikat e zbatimit të saj në lëndën e matematikës. Rëndësi e veçantë i është kushtuar shtjellimit të strukturës ERR (Evokim, Realizim i kuptimit, Reflektim) të organizimit të orës mësimore, hartimit të rezultateve të të nxënësve, si dhe mënyrës së vlerësimit të nxënësve. Në vazhdim janë dhënë nga 2-3 mësimet model për secilën nga klasat 1-5, si dhe një model testi për klasën e pestë. Modelet e mësimi janë përgatitur për secilin nga 6 kapitujt e dhënë në pjesën e parë. Kjo është bërë me qëllim që të tregohet se metodologjia bashkëkohore mund të zbatohet në të gjitha disiplinat matematikore, si në aritmetikë, gjeometri, punë me të dhëna, etj. Modelet janë përgatitur për të shërbyer si udhëzues praktik për mësimdhënësit që dëshirojnë të zbatojnë metodologjinë bashkëkohore në klasat e tyre. Ndërsa, përmes modelit të testit synohet të konkretizohet informacioni i dhënë lidhur me përgatitjen sa më cilësore të testeve.

Katër kapitujt e parë të udhëzuesit që përfshijnë temat për bashkësitë dhe relacionet, numrat natyrorë dhe veprimet me ta, thyestat, matjen dhe masat, si dhe mësimet model për thyestat që tregojnë të njëjtën pjesë të një tërësie dhe prerjen e bashkësive janë hartuar nga Dr. Sc. Qamil Haxhibeqiri. Kapitujt që përfshijnë temat nga gjeometria dhe puna me të dhëna, si dhe mësimet model për këndin, katërkëndëshin dhe paraqitjen e të dhënave me diagram janë përgatitur nga Mr. sc. Ramadan Limani, ndërsa pjesa e përgjithshme metodologjike e udhëzuesit, së bashku me mësimet model që nuk janë përmendur më sipër, si dhe modeli i testit janë përgatitur nga Mr. sc. Melinda Mula.

Udhëzuesi “Matematika dhe mësimdhënia e matematikës për klasat 1-5” është përgatitur për të shërbyer si material bazë për organizimin e trajnimeve nga GIZ për aftësimin e mësimdhënësve klasorë për të sqaruar me korrektësi nocionet dhe kuptimet matematikore, si dhe për të zbatuar metodologjinë bashkëkohore të mësimdhënies dhe të të nxënësve në klasat e tyre. Mënyra sistematike dhe e qartë e prezantimit të informacionit bën që ky udhëzues të përdoret edhe nga mësimdhënësit që nuk kanë mundësi të përfshihen në programin e trajnimit, mirëpo janë të interesuar të përfitojnë njohuri nga matematika dhe mësimdhënia e saj, si dhe nga studentët e profileve arsimore, hartues të librave shkollorë dhe të testeve për këtë nivel të shkollimit.

Prishtinë,
Dhjetor 2011

Autorët

Programi – Matematika dhe Mësimdhënia e Matematikës për klasat 1-5

Synimi i Programit të trajnimit:

Aftësimi i mësimdhënësve të klasave 1-5 për përvetësimin e njohurive matematikore me synim të ngritjes së rezultateve të të nxëniet në këtë nivel të arsimit.

QËLLIMET E PROGRAMIT:

Me përvetësimin e këtij Programi pjesëmarrësit duhet të jenë në gjendje:

- Të konceptojnë matematikën si një lëndë që studion format hapësinore dhe raportet sasiore.
- Të sqarojnë koncepte, rregulla dhe procedura për zgjidhjen e detyrave të ndryshme në këtë lëndë për nivelin 1-5.
- Të konkretizojnë nocionet matematikore me shembuj nga jeta praktike duke mishëruar idenë se matematika ka zbatim të jashtëzakonshëm në jetën reale.
- Të identifikojnë dhe përdorin lidhjet që ekzistojnë brenda lëndës së matematikës për zgjidhjen e detyrave të ndryshme, si dhe lidhjet me fushat e tjera.
- Të përdorin formula, diagrame, paraqitje grafike, etj. për zgjidhjen e detyrave të ndryshme.
- Të ndihmojnë zhvillimin e inteligjencës logjike-matematike të nxënësit, e cila i ndihmon ata për të kuptuar më mirë gjërat që na rrethojnë.
- Të zbatojnë metodologji të reja të mësimdhënies gjatë shtjellimit të përmbajtjeve matematikore.

Grupi i synuar

Ky program i dedikohet mësimdhënësve të shkollave fillore të nivelit 1-5 me fokus të veçantë në njohuri matematikore. Po ashtu, programi mund të jetë i dobishëm edhe për mësimdhënësit e ardhshëm të këtij niveli.

Programi ka gjithsej 50 orë.

Profili i Kompetencave të Mësimdhënësve

Ministria e Arsimit, e Shkencës dhe e Teknologjisë ka përgatitur profilin e kompetencave që një mësimdhënës duhet të ketë. Me anën e Programit “Matematika dhe mësimdhënia e matematikës për klasat 1-5” synohet të zhvillohen të mësimdhënësit kompetencat që kanë të bëjnë me Metodologjinë dhe Përmbajtjen akademike. Në tabelën e mëposhtme është dhënë përshkrimi i profilit të kompetencave të kategorive të përmendura, të aporvuara nga Këshilli Shtetëror për Licensimin e Mësimdhënësve.

METODOLOGJIA

KOMPETENCA		KOMPETENCA	
M01 Përshtatja	Përshtatë mësimdhënien dhe mesimnxenien në kontekst të mësimdhënies, Din të analizoje shumë faktore në të njëjtën kohë Din të reagoje dhe të marrë vendimin e duhur në situata të ndryshme duke marrë vendime të arsyeshme për praktikën e mësimdhënies dhe për të mësuarit e nxënësve Din të reagojë në mënyrën e duhur në rrethana të ndryshme	M02 Aplikimi i kontekstit personal	Merr parasysh kontekstin personal të nxënësve dhe situatat mësimore U ndihmon nxënësve me probleme personale brenda kufijve të aftësive/mundësive profesionale
M03 Planifikimi	Është në gjendje të shpjegojë qëllimin e planifikimit të aktiviteteve të gjithëmbarshme afatshkurtra, afatmesme dhe afatgjata Është në gjendje të zërthejë kurrikulumin dhe rezultatet e dëshiruara në aktivitete të përshtatshme, kuptimplota për nxënësit Është në gjendje të ndryshojë planet e punës për t'i përshtatur aktivitetet mësimore me nevojat dhe interesat e individëve dhe grupeve të nxënësve Është në gjendje të zbatojë dhe përshtatë planet e punës dhe aktivitetet mësimore me nevojat dhe interesat e individëve dhe grupeve të nxënësve	M04 Plotësimi i nevojave të nxënësve	Është i/e vetëdijshme për nevojat e nxënësve për siguri fizike, sociale, kulturore e psikologjike Din si t'i angazhojë nxënësit në krijimin e rutinave ditore efektive në klasë Din si dhe kur të zbatojë strategji të ndryshme menaxhuese që kanë të bëjnë me ruajtjen e atmosferës mësimore, dhe që minimizojnë pengesat në të mësuarit e nxënësve
M05 Respekti	Respekton dinjitetin njerëzor të nxënësve Din të krijojë, me nxënës të ndryshëm, marrëdhënie pozitive nxënës-mësimdhënës që karakterizohen me respekt, besim dhe harmoni reciproke	M06 Diagnostifikimi i strategjive mësimore	Njih një gamë të gjerë të qasjeve dhe strategjive mësimore të përshtatshme për nivelet e arsimit dhe disiplinat lëndore Din cilat strategji janë të përshtatshme për të ndihmuar nxënësit të ndryshëm të arrijnë rezultate të pritshme

M07 Posedimi i një repertori strategjish	Njeh dhe aplikon një repertor të gjerë metodash dhe strategjish të praktikës së mësimdhënies	M08 Përdorimi i një repertori metodash	Posedon njohuri të thella për metodat e ndryshme të mësimdhënies dhe për mënyrat e organizimit të mësimi
M09 Inkorporimi i aktiviteteve mësimore	Ofron një shumëllojshmëri të aktiviteteve mësimore për plotësimin e nevojave të të gjithë nxënësve duke përfshirë nxënësit me nevoja të veçanta	M10 Përdorimi i shumë metodave	Përdorë një shumëllojshmëri metodash për angazhimin e nxënësve në mësim përmes bashkëpunimit
M11 Përdorimi i materialeve për mësimdhënie dhe mësimnxënie	Kupton funksionin e të gjitha teknologjive dhe mjeteve (tradicionale/elektronike) për mësimdhënie dhe mësimnxënie Din si të përdorë dhe si të angazhojë nxënësit në përdorimin e këtyre teknologjive për të prezantuar përmbajtjen, për të komunikuar me të tjerët në mënyrë efektive, për të gjetur dhe siguruar informacione, për hulumtime, për përpunim të tekstit, për menaxhim të informacionit, dhe për të regjistruar/mbajtur shënime	M12 Përdorimi i burimeve nga shtëpia dhe komuniteti	E din se të mësuarit e nxënësve thellohet përmes përfshirjes së burimeve nga shtëpia dhe të komunitetit Din si t'i identifikojë burimet relevante për objektivat e mësimdhënies dhe mësimnxënies Din si t'i inkorporojë këto burime në mësimdhënie dhe në të mësuarit e nxënësve
M13 Përdorimi i modeleve të mësimdhënies	Kupton se ekzistojnë modele të ndryshme të mësimdhënies dhe mësimnxënies dhe metoda të ndryshme për nxitjen e të mësuarit	M14 Përdorimi i nivelit të lartë të të menduarit	Posedon shkathtësi për vëzhgim, analizë dhe interpretim për ta përshtatur planifikimin dhe mësimdhënien me nevojat e grupit të nxënësve dhe me situatën
M15 Zbatimi i Taksonomisë së Bloom-it	Zhvillon shkathtësi të të menduarit të nivelit të lartë	M16 Balancimi i metodave	Balancon metodat tradicionale dhe të reja të mësimdhënies dhe të vlerësimit
M17 Kuptimi i sjelljes së grupeve	Kupton si funksionojnë grupet e nxënësve dhe njeh strategji për nxitjen e funksionimit efektiv të tyre	M18 Ekspozimi i punës	Është në gjendje të krijojë një ambient stimulues në klasë duke ekspozuar punën e nxënësve, modele, piktura etj.
M19 Angazhimi i kontributit të nxënësve	Përfshin nxënësit në procese të vendimmarrjes dhe është konsistent në praktikë.	M20 Roli lehtësues	Vepron si lehtësues i të nxënit
M21 Arritja e lidhshmërisë	Krijon përvoja mësimore kuptimplota për nxënësit	M22 Përdorimi i qasjeve gjeneruese	Din si t'i thjeshtojë konceptet komplekse deri në nivelin e nevojshëm për grupin e caktuar të nxënësve
M23 Thjeshtësimi i koncepteve	Ka njohuri për mënyrat e thjeshta të mësimdhënies dhe mësimnxënies së lëndës		

PËRMBAJTJA AKADEMIKE

KOMPETENCA		KOMPETENCA	
PA01 Rë qenit në hap me specializimin	Është gjithmonë aktual në fushën lëndore të tij/saj Përfundon me sukses një program formal studimor që demonstroi të kuptuar të thellë të përmbajtjes në një ose më shumë fusha të specializimit apo disiplina lëndore sipas sistemit arsimor në shkollat e Kosovës	PA02 Të qenit aktual	Është në hap me zhvillimet dhe ndryshimet në fushën përkatëse të specializimit
PA03 Ruajtja e të kuptuarit të thellë	Posedon njohuri të thella akademike për fushat e specializimit	PA04 Hulumtimi	Din ku të gjejë dhe si të sigurojë njohuri/ ekspertizë për lëndën kur është e nevojshme
PA05 Zbatimi	Ka njohuri për lidhjet e lëndës me lëndët tjera dhe për rëndësinë e saj në jetën e përditshme si dhe për zbatimet		

I. Bashkësitë dhe veprimet me to

Kuptimi i bashkësisë është kuptim themelor në matematikë në mbështetje të të cilit ndërtohet pothuajse e tërë matematika bashkëkohore. Që në hapat e parë të njohjes me koncepte matematikore fëmija vihet para një zgjedhjeje: ta njohë botën përmes numrave apo përmes gjërave që janë të njohura për të. Përvoja tregon se kuptimi i bashkësisë është më i afërt për fëmijën e moshës së hershme sesa kuptimi i numrit dhe i veprimit me numra. Kështu, bashkësia e librave nuk është tjetër vetëm se një grumbull objektsh që ndodhen në çantën shkollore të secilit nxënës, bashkë me grumbuj të tjerë si: bashkësia e fletoreve, bashkësia e ngjyrave të drurit, bashkësia e lapsave, etj. Kjo afërsi e kuptimit me situatën në të cilën ndodhet nxënësi bën të mundur që pika nsimëtare për ta njohur matematikën të jetë pikërisht kuptimi i bashkësisë.

Dallimi i vetive të përbashkëta të objekteve që do të quhen elemente të një bashkësie, nuk është gjë tjetër vetëm se shfrytëzim i përvojës që ka akumuluar fëmija në vitet e para të rritës së vet. Kjo bën të mundur të ndërliiden në mes vete objektete që duam t'i bëjmë bashkë për çfarëdo arsye, si dhe ato që u takojnë bashkësive të ndryshme, por kanë veti të përbashkëta. Kështu, veprimet me bashkësi i paraprijnë veprimeve me numra, sa do që fëmija mund t'i bëjë ato në mënyrë të pavetëdijshme.

1.1. Kuptimi i bashkësisë. Elementet e bashkësisë

Kuptimi i bashkësisë nuk përkufizohet, por megjithatë, bashkësia mund të shihet si tërësi e objekteve që e përbëjnë (formojnë) atë. Kuptimi i bashkësisë më së miri sqarohet me anën e shembujve.

! SHEMBULLI 1.

- Bashkësia e zanoreve të alfabetit të gjuhës shqipe.
- Bashkësia e numrave natyrorë më të mëdhej se 4 e më të vegjël se 10.
- Bashkësia e shkronjave të fjalës “abetarja”.
- Bashkësia e ditëve të javës.
- Bashkësia e muajve të vitit.

Objektet që e formojnë bashkësinë i quajmë elemente të asaj bashkësie. Bashkësitë i shënojmë me shkronja të mëdha të alfabetit (A, B, C, Ç, D, ...) kurse elementet e tyre me shkronja të vogla të alfabetit (a, b, c, ...). Në qoftë se objekti *a* i takon bashkësisë A, shkruajmë $a \in A$ dhe e lexojmë *a* është element i bashkësisë A ose *a* i takon bashkësisë A. Faktin që objekti *a* nuk i takon bashkësisë A e shënojmë $a \notin A$ dhe e lexojmë *a* nuk është element i A-së, ose *a* nuk i takon A-së.

! SHEMBULLI 2.

Nëse me A, B, C, ζ, D i shënojmë, përkatësisht, bashkësitë nga shembulli 1, a), b), c), ζ dhe d), atëherë:

- a) Elementet e bashkësisë A janë shkronjat $a, e, \ddot{e}, i, o, u, y$, kështu që mund të shënojmë $a \in A, e \in A, \ddot{e} \in A, i \in A, o \in A, u \in A, y \in A$; por $b \notin A, d \notin A, f \notin A$.
- b) Elementet e bashkësisë B janë numrat $5, 6, 7, 8, 9$, kështu që $5 \in B, 6 \in B, 7 \in B, 8 \in B, 9 \in B$; por $1 \notin B, 3 \notin B, 11 \notin B, 15 \notin B$.
- c) Elementet e bashkësisë C janë shkronjat a, b, e, t, a, r, j, a . Prandaj, $a \in C, b \in C, e \in C, t \in C, r \in C, j \in C$; por $u \notin C, z \notin C, p \notin C$.
- ζ) Elementet e bashkësisë ζ janë *e hënë, e martë, e mërkurë, e enjte, e premte, e shtunë, e diel*, d.m.th. *e hënë* $\in \zeta$, *e martë* $\in \zeta$, *e mërkurë* $\in \zeta$, *e enjte* $\in \zeta$, *e premte* $\in \zeta$, *e shtunë* $\in \zeta$, *e diel* $\in \zeta$; por *janari* $\notin \zeta$, *maji* $\notin \zeta$, *korriku* $\notin \zeta$.
- d) Elementet e bashkësisë D janë *janari, shkurti, marsi, prilli, maji, qershori, korriku, gushti, shtatori, tetori, nëntori, dhjetori*. Kështu, *janari* $\in D$, *shkurti* $\in D$, *marsi* $\in D$, *prilli* $\in D$, *maji* $\in D$, *qershori* $\in D$, *korriku* $\in D$, *gushti* $\in D$, *shtatori* $\in D$, *tetori* $\in D$, *nëntori* $\in D$, *dhjetori* $\in D$; por, *e martë* $\notin D$, *e enjte* $\notin D$, *e diel* $\notin D$.

Dallojmë këto mënyra të dhënies së bashkësive.

- **Dhënia e bashkësisë me anën e emërimit** – bëhet duke shënuar (emërtuar) elementet e saj brenda kllapave gjarpërore $\{ \}$ dhe duke i ndarë ata me presje.

! SHEMBULLI 3.

Bashkësitë nga shembulli 1 shënohen kështu :

- a) $A = \{a, e, \ddot{e}, i, o, u, y\}$; b) $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$; c) $C = \{a, b, e, t, r, j\}$;
 ζ) $\zeta = \{e \text{ hënë}, e \text{ martë}, e \text{ mërkurë}, e \text{ enjte}, e \text{ premte}, e \text{ shtunë}, e \text{ diel}\}$;
d) $D = \{\text{janari}, \text{shkurti}, \text{marsi}, \text{prilli}, \text{maji}, \text{qershori}, \text{korriku}, \text{gushti}, \text{shtatori}, \text{tetori}, \text{nëntori}, \text{dhjetori}\}$.

Kjo mënyrë e shënimit (dhënjes) së bashkësive është e përshtatshme në rastin kur bashkësia nuk ka numër të madh elementesh. Nëse dëshirojmë ti shënojmë elementet e një bashkësie të pafundme në mënyrë eksplicite (të dukshme), atëherë, pas shënimit të disa elementeve të saj vendosim tri pika të cilat tregojnë se procesi i shënimit të elementeve të asaj bashkësie (sipas një ligji (rregulle)) vazhdon në pafundësi. Kështu p.sh. me:

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}, \{2, 4, 6, \dots\}, \{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

shënohet , përkatësisht, bashkësia e të gjithë numrave natyrorë, bashkësia e të gjithë numrave tek, bashkësia e të gjithë numrave çift dhe bashkësia e të gjithë shumëfishave të numrit 3.

Po ashtu, vërejmë që në shënimin e bashkësisë C të shkronjave të fjalës “*abetarja*” shkronja a është shënuar vetëm një herë (e jo tri herë sa paraqitet në fjalën “*abetarja*”). Pra, **në shënimin e bashkësisë një element shënohet vetëm një herë** (d.m.th. **nuk bëhet përsëritja e elementeve**). Po ashtu, në shënimin e bashkësisë **radhitja apo vendndodhja e elementeve nuk ka rëndësi**. Kështu, p.sh.

$$\{a, b, e, t, r, j\}, \{a, b, e, t, a, r, j, a\}, \{b, e, r, a, j, t\}, \{t, e, a, r, j, b, a, e, r\}$$

paraqesin të njëjtën bashkësi – bashkësinë C të të gjitha shkronjave të fjalës *abetarja*. Me marrëveshje, bashkësinë e tillë do ta shënojmë $C = \{a, b, e, j, r, t\}$ duke mospërsëritur shënimin e elementeve të njëjtë dhe duke ruajtur radhitjen alfabetike të shkronjave (ndonëse kërkesa e fundit nuk është e domosdoshme por bëhet për shkaqe estetike).

2. Dhënia e bashkësive me anën e përshkrimit – bëhet duke shënuar brenda kllapave gjarpërore një shkronjë (që shënon elementet e bashkësisë) pas të cilës vendosen dy pika vertikale ose një vijë vertikale dhe pastaj përshkruhet vetia e përbashkët V e elementeve të asaj bashkësie. Shënimi i tillë ka këtë formë:

$$\{x : V(x)\} \text{ ose } \{x \mid V(x)\}.$$

“:” ose “|” lexohet “të tillë që” kurse $V(x)$ lexohet “(elementi) x e ka vetinë V ”, ndërkaq $\{x : V(x)\}$ ose $\{x \mid V(x)\}$ lexohet “bashkësia e elementeve x (të tillë) që e kanë vetinë V ”. Në vend të shkronjave x dhe V mund të shënohen çfarëdo shkronjash tjera.

SHENBULLI 4.

Bashkësitë A, B, C, ζ, D nga shembujt e mëparshëm mund të shënohen kështu:

a) $A = \{x : x \text{ është zanore e alfabetit tonë}\};$

b) $B = \{a : a \in \mathbf{N} \text{ dhe } 4 < a < 10\}$

ose $B = \{a \in \mathbf{N} : 4 < a < 10\}$ ($\mathbf{N}$ është bashkësia e numrave natyrorë).

c) $C = \{x \mid x \text{ është shkronjë e fjalës “abetarja”}\};$ ç) $\zeta = \{y : y \text{ është ditë e javës}\};$ d) $D = \{x \mid x \text{ është muaj i vitit}\}$

3. Dhënia e bashkësisë me anën e diagramit të Venit – bëhet duke shënuar elementet e saj brenda një vije të mbyllur në rrafsh (p.sh. elipsi, rrethi, drejtkëndëshi, trekëndëshi, etj). Bashkësitë A, B, C, ζ dhe D nga shembujt paraprak të paraqitura me diagramin e Venit duken kështu:

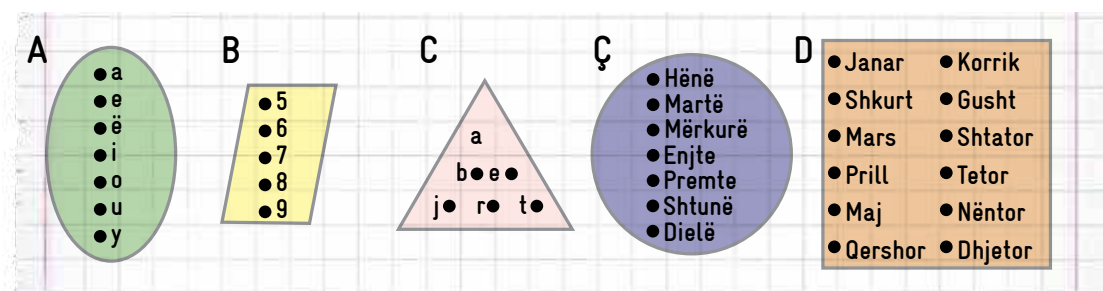


Fig. 1.

SHENBULLI 5.

Bashkësitë A dhe B janë dhënë me diagramet e Venit në Fig. 2. Të shënohet se cilët elemente i takojnë atyre bashkësive e cilët nuk iu takojnë.

! ZGJIDHJE

$a \in A, a \notin B, 1 \in A, 1 \notin B, 3 \in A, 3 \in B, b \in A, b \in B,$
 $c \in B, c \notin A, d \in B, d \notin A, 4 \in B, 4 \notin A, x \notin A, x \notin B, y \notin A, y \notin B.$

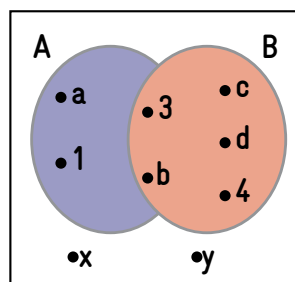


Fig. 2

Bashkësia e cila nuk ka asnjë element quhet **bashkësi e zbrazët** ose **bashkësi boshe** dhe shënohet me $\emptyset$.

! SHEMBULLI 6.

- Bashkësia A e të gjithë njerëzve të gjallë të lindur në vitin 1840 është e zbrazët, d.m.th. $A = \emptyset$, sepse asnjë njeri i lindur më 1840 nuk është i gjallë.
- Bashkësia B e të gjitha qyteteve të Kosovës me më shumë se 1 000 000 banorë është e zbrazët sepse asnjë qytet i Kosovës nuk i ka më shumë se 1 000 000 banorë; pra $B = \emptyset$.
- Bashkësia C e muajve të vitit që kanë 25 ditë është bashkësi e zbrazët, $C = \emptyset$, sepse asnjë muaj nuk i ka 25 ditë.
- Bashkësia ζ e njerëzve që jetojnë në Hënë është e zbrazët; $\zeta = \emptyset$.

Me $n(A)$ do të shënojmë numrin e elementeve të bashkësisë A . Është e qartë që $n(\emptyset) = 0$. A quhet **bashkësi e fundme** nëse $A = \emptyset$ (d.m.th. nëse $n(A) = 0$) ose nëse ekziston numri natyror n i tillë që $n(A) = n$; në të kundërtën, nëse nuk ekziston asnjë numër natyror n i tillë që $n(A) = n$, A quhet **bashkësi e pafundme**. Me fjalë të tjera, A është **bashkësi e fundme** (e pafundme) nëse përmban (nuk përmban) numër të fundëm elementesh.

! SHEMBULLI 7.

Bashkësitë $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ janë të fundme sepse $n(A) = 4$ dhe $n(B) = 6$. Bashkësia C e numrave më të mëdhej se 7 dhe më të vegjël se 3 është e zbrazët ($C = \emptyset$) dhe, si e tillë, është e fundme. Ndërkaq, bashkësia N e të gjithë numrave natyrorë, bashkësia Z e të gjithë numrave të plotë, bashkësia T e të gjithë numrave tek janë të pafundme (sepse nuk ekziston asnjë numër natyror n i tillë që $n(N) = n$, $n(Z) = n$, $n(T) = n$).

! SHEMBULLI 8.

Bashkësia A është dhënë me diagramin e mëposhtëm të Venit:



Fig. 3.

Elementet e saj janë *lulja* (l), *fletorja* (f) dhe *kutija e lapsave* (k); prandaj bashkësinë e tillë e shënojmë kështu: $A = \{\text{lulja, fletorja, kutija e lapsave}\}$ ose $A = \{l, f, k\}$. Pra, $lulja \in A$, $fletorja \in A$, $kutija e lapsave \in A$. Në kutinë e lapsave ndodhen tre lapsa: lapsi i kuq (l_1), lapsi i kaltër (l_2) dhe lapsi i zi (l_3), kështu që kutija e lapsave (k) mund të shihet si bashkësi e këtyre tre lapsave, d.m.th. $k = \{l_1, l_2, l_3\}$. Duke pasur parasysh këtë, bashkësinë A mund ta shënojmë edhe kështu: $A = \{l, f, \{l_1, l_2, l_3\}\}$. Bëhet pyetja: A është lapsi i kuq (l_1) element i bashkësisë A ? Përgjigja është jo: $l_1 \notin A$. Por, lapsi i kuq l_1 është element i kutisë së lapsave k e kjo e fundit është element i bashkësisë A . Pra, $l_1 \in k$ dhe $k \in A$, por $l_1 \notin A$. E njëjta gjë mund të thuhet edhe për lapsin e kaltërt l_2 ose për lapsin e zi l_3 .

1.2. Nënbashkësia. Bashkësitë e barabarta.

Bashkësia A quhet **nënbashkësi** e bashkësisë B , dhe shënojmë $A \subseteq B$, në qoftë se *çdo* element i bashkësisë A është element i bashkësisë B ; në këtë rast themi, po ashtu, që B është **mbibashkësi** e bashkësisë A dhe shënojmë $B \supseteq A$. Pra:

$A \subseteq B$ atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo $x \in A$, vlen $x \in B$.

Në të kundërtën, nëse *ekziston* të paktën një element i bashkësisë A që nuk është element i bashkësisë B themi që A **nuk është nënbashkësi** e bashkësisë B (ose, B **nuk është mbibashkësi** e bashkësisë A) dhe shkruajmë $A \not\subseteq B$. D.m.th.

$A \not\subseteq B$ atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston të paktën një $x \in A$ dhe $x \notin B$

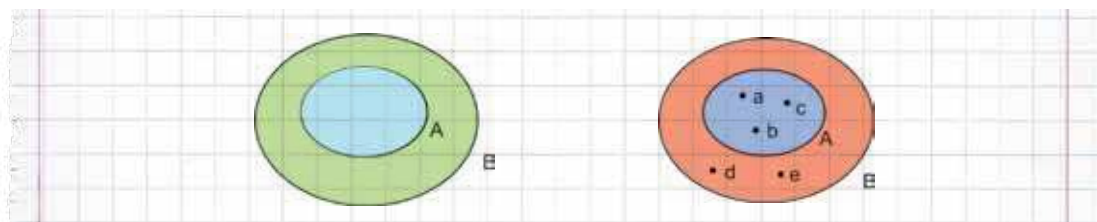


Fig. 4.

Fig. 5.

Në figurën 4 me anën e diagramit të Venit është paraqitur nënbashkësia A e bashkësisë B .

SHEMBULLI 9.

a) Nëse $A = \{\text{Agimi, Hana, Zana, Besniku}\}$ është bashkësia e fëmijëve të një çifti bashkëshortor, atëherë bashkësia $V = \{\text{Hana, Zana}\}$ e vajzave dhe bashkësia $D = \{\text{Agimi, Besniku}\}$ e djemve të atij çifti bashkëshortor janë nënbashkësi të bashkësisë A , d.m.th. $V \subseteq A$ dhe $D \subseteq A$.

b) Nëse $A = \{a, b, c\}$ dhe $B = \{a, b, c, d, e\}$, atëherë $A \subseteq B$ sepse çdo element i bashkësisë A është element edhe i bashkësisë B . Por, $B \not\subseteq A$ sepse p.sh. ekziston $d \in B$ i tillë që $d \notin A$ (ose, ekziston $e \in B$ dhe $e \notin A$). (Shih edhe diagramin e Venit në Fig. 5)

c) Bashkësia $T = \{1, 3, 5, \dots\}$ e të gjithë numrave natyrorë tek është nënbashkësi e bashkësisë

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ të të gjithë numrave natyrorë, d.m.th. $T \subseteq N$. Mirëpo, N nuk është nënbashkësi e bashkësisë T d.m.th. $N \not\subseteq T$, sepse p.sh. $2 \in N$, por $2 \notin T$. Po ashtu, bashkësia $C = \{2, 4, 6, \dots\}$ e të gjithë numrave natyrorë çift është nënbashkësi e bashkësisë N , d.m.th. $C \subseteq N$.

ç) Meqë çdo bashkësi A i përmban të gjithë elementet e saj, përfundojmë se ajo është nënbashkësi e vetvetes, d.m.th. për çdo bashkësi A vlen $A \subseteq A$. Po ashtu, bashkësia e zbrazët është nënbashkësi e çdo bashkësie A , d.m.th. për çdo bashkësi A vlen $\emptyset \subseteq A$.

d) Le të jetë $A = \{1, 2, 3\}$. Që të gjejmë të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë A veprojmë kështu:

Nënbashkësia e A -së që nuk ka asnjë element është bashkësia e zbrazët $\emptyset$;

Të gjitha nënbashkësitë njëelementëshe të A -së janë: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$;

Të gjitha nënbashkësitë dyelementëshe të A -së janë: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$;

Nënbashkësia me tri elemente e A -së është vet bashkësia $A = \{a, b, c\}$.

Kështu, të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë trielementëshe $A = \{a, b, c\}$ janë këto 8 bashkësi: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ dhe $\{a, b, c\}$; d.m.th.: $\emptyset \subseteq A$, $\{a\} \subseteq A$, $\{b\} \subseteq A$, $\{c\} \subseteq A$, $\{a, b\} \subseteq A$, $\{a, c\} \subseteq A$, $\{b, c\} \subseteq A$, $\{a, b, c\} = A \subseteq A$. Bashkësinë e të gjitha nënbashkësive të bashkësisë A e quajmë **bashkësia partitive** ose **bashkësia e pjesëve të bashkësisë A** dhe e shënojmë me $\mathcal{P}(A)$. Kështu, nëse $A = \{1, 2, 3\}$, atëherë

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$$

Vëreni që gjithmonë $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ dhe $A \in \mathcal{P}(A)$. Po ashtu, vëreni që nëse $n(A) = n$ atëherë $n(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Kujdes: Duhet të dallojmë elementin e bashkësisë nga nënbashkësia e asaj bashkësie, d.m.th. duhet të bëjmë dallimin ndërmjet simboleve $\in$ dhe $\subseteq$. Kështu, p.sh.

- a është i ndryshëm nga $\{a\}$; a është një element kurse $\{a\}$ është bashkësi që për element të vetëm ka elementin a . D.m.th. $a \neq \{a\}$ por $a \in \{a\}$.
- Nëse $A = \{a, b, c\}$ atëherë $a \in A$, por $\{a\} \subseteq A$. Ose: $b \in \{a, b\} \subseteq A$.

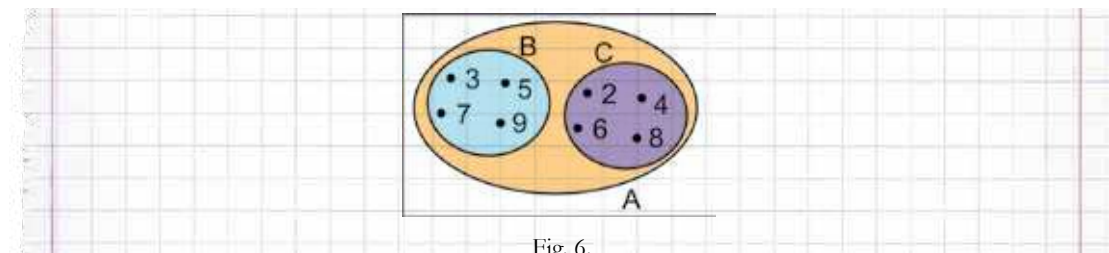


Fig. 6.

SHENBULLI 10.

Bashkësia A dhe dy nënbashkësitë e saj B dhe C janë dhënë me diagramin e Venit në Fig.6. Nënbashkësitë B , C të jepen me anën

- e emërtimit të elementeve të tyre.
- e përshkrimit të një (ose më shumë) vetie të përbashkët të elementeve të tyre.

1 ZGJIDHJE

Para së gjithash vërejmë që $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

a) $B = \{3, 5, 7, 9\}$; $C = \{2, 4, 6, 8\}$;

b) $B = \{x \in A \mid x \text{ është numër tek}\}$ ose $B = \{x \mid x \text{ është numër tek i dhjetësbes së parë i ndryshëm nga 1}\}$ ose $B = \{x \mid x \text{ është numër tek dhe } 3 \leq x \leq 9\}$ ose $B = \{x \mid x \text{ është numër tek dhe } 2 < x < 10\}$;

$C = \{x \in A \mid x \text{ është numër çift}\}$ ose $C = \{x \mid x \text{ është numër çift i dhjetësbes së parë i ndryshëm nga 10}\}$ ose

$C = \{x \mid x \text{ është numër çift dhe } 2 \leq x \leq 8\}$ ose $C = \{x \in A \mid x \text{ plotëpjesëtohet me 2}\}$ ose

$C = \{x \mid x \text{ është numër çift dhe } 1 < x < 9\}$.

A dhe B quhen **bashkësi të barabarta**, dhe shënojmë $A = B$, në qoftë se $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq A$, d.m.th. në qoftë se çdo element i njërës bashkësi është element edhe i tjetrës. Me fjalë të tjera. $A = B$ nëse A dhe B përbëhen prej elementeve të njëjtë. Ndërkaq, A dhe B janë **bashkësi të ndryshme (jo të barabarta)** (shënojmë $A \neq B$) nëse ekziston të paktën një element i njërës nga ato bashkësi që nuk është element i tjetrës. Pra:

$A = B$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq A$.

$A \neq B$ atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston $x \in A$ dhe $x \notin B$ ose ekziston $x \in B$ dhe $x \notin A$.

1 SHEMBULLI 11.

a) Në qoftë se $A = \{a, b, c, d, e\}$ dhe $B = \{c, e, d, a, b\}$ atëherë $A = B$ sepse çdo element i A është element i B (d.m.th. $A \subseteq B$) dhe çdo element i B është element i A (d.m.th. $B \subseteq A$). (Ky shembull ilustron faktin e theksuar më parë që renditja e elementeve në shënimin e bashkësisë nuk luan rol)

b) Nëse $A = \{2, 4, 5, 5, 6, 6\}$, $B = \{2, 2, 4, 5, 6\}$ dhe $C = \{2, 4, 5, 6\}$ atëherë që të tri këto bashkësi përbëhen prej elementeve të njëjtë dhe, si të tilla, janë të barabarta, d.m.th. $A = B = C$. (Ky shembull ilustron faktin e theksuar më parë që në shënimin e bashkësive nuk bëhet përsëritja e elementeve).

c) Në qoftë se $A = \{a, b, c, 3, 4, 5\}$ dhe $B = \{1, 3, 4, 5, a, b, c\}$, atëherë çdo element i bashkësisë A është element edhe i bashkësisë B (që d.m.th. se $A \subseteq B$) por elementi $1 \in B$ dhe $1 \notin A$ (që d.m.th. se $B \not\subseteq A$); prandaj, $A \neq B$.

d) Le të jenë $A = \{a, b, 3, 4\}$ dhe $B = \{1, 4, c, b\}$. Atëherë, $3 \in A$ dhe $3 \notin B$ që d.m.th. se $A \not\subseteq B$. Po ashtu, $c \in B$ dhe $c \notin A$ që d.m.th. se $B \not\subseteq A$. Prandaj, $A \neq B$.

1 SHEMBULLI 12.

Janë dhënë bashkësitë

a) $A = \{\{x\}\}$ dhe $B = \{x\}$; b) $A = \{\emptyset\}$ dhe $B = \emptyset$; c) $A = \{\emptyset\}$ dhe $B = \{0\}$;

Në secilin nga rastet e mësipërme shqyrtoni se a është $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ apo $A = B$?

! ZGJIDHJE

a) $A \not\subseteq B$, sepse $\{x\} \in A$ por $\{x\} \notin B$; $B \not\subseteq A$, sepse $x \in B$ por $x \notin A$. Kështu $A \neq B$, edhe pse A dhe B janë bashkësi njëelementëshe: A është bashkësi njëelementëshe që për element ka bashkësinë njëelementëshe $\{x\}$, B është bashkësi njëelementëshe që për element ka x .

b) A është bashkësi njëelementëshe që për element ka bashkësinë e zbrazët $\emptyset$ kurse B është bashkësia e zbrazët $\emptyset$, prandaj $A \neq B$. $A \not\subseteq B$, sepse $\emptyset \in A$ por $\emptyset \notin B$; $B \subseteq A$ sepse bashkësia e zbrazët B është nën-bashkësi e çdo bashkësie.

c) $A \not\subseteq B$, sepse $\emptyset \in A$ por $\emptyset \notin B$. $B \not\subseteq A$ sepse $0 \in A$ por $0 \notin B$. Prandaj, $A \neq B$; A është bashkësi njëelementëshe që për element ka bashkësinë $\emptyset$ kurse B është bashkësi njëelementëshe që për element ka numrin 0.

1.3 Veprimet me bashkësi

Unioni (bashkimi) i bashkësive. *Union* i bashkësive A dhe B quhet bashkësia që përbëhet prej elementeve që i takojnë të paktën njëres prej bashkësive A ose B , d.m.th. bashkësia që përbëhet prej elementeve që i takojnë bashkësisë A ose bashkësisë B ose që të dy këtyre bashkësive; shënohet me $A \cup B$. Pra:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ose } x \in B\}.$$

Në figurën 7 (pjesa e hijezuar) është paraqitur unioni i bashkësive A dhe B me anën e diagramit të Venit:

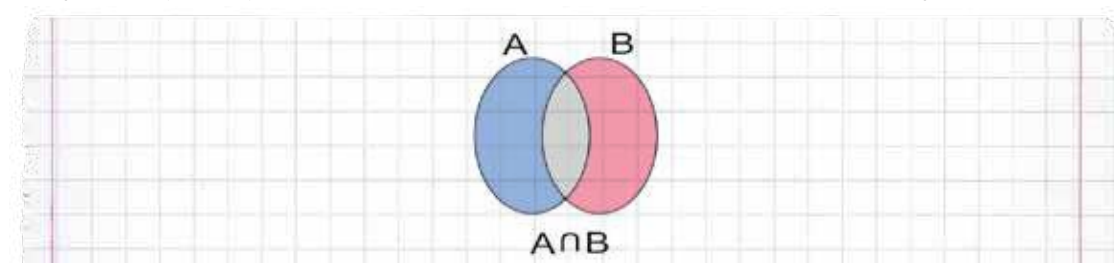


Fig. 7

! SHEMBULLI 13.

a) Në qoftë se $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $D = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, atëherë:
 $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; $C \cup D = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$; $A \cup C = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 5, 7\}$;
 $B \cup D = \{c, d, e, 3, 5, 7, 9, 11\}$; $B \cup A = \{c, d, e, a, b\} = \{a, b, c, d, e\}$;
 $(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e\} \cup \{1, 2, 3, 5, 7\} = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 5, 7\}$;
 $A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d\} \cup \{c, d, e, 1, 2, 3, 5, 7\} = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 5, 7\}$.

b) Le të jenë $A = \{3, 4, 5\}$ dhe $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Atëherë, $A \subseteq B$ dhe $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B$.

Në figurën 8 janë paraqitur unionet $A \cup B$ dhe $C \cup D$ të bashkësive nga shembulli 13, a) me anën e diagrameve të Venit.

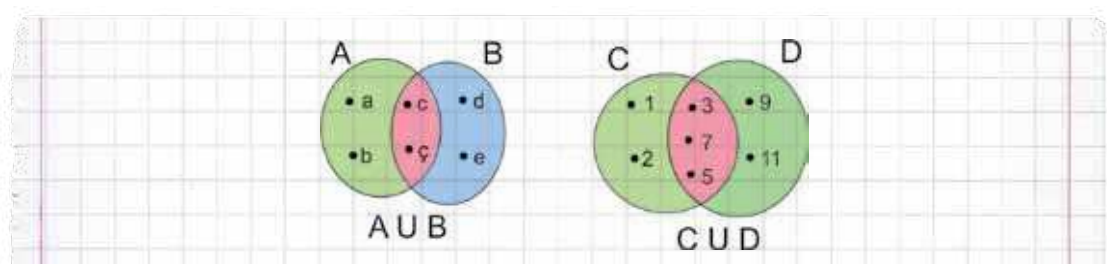


Fig. 8

Meqë në shënimin e bashkësisë nuk bëhet përsëritja e elementeve dhe nuk ka rëndësi radhitja (vendndodhja) e tyre, në shënimin e unionit të dy bashkësive së pari shënojmë të gjithë elementet e bashkësisë së parë e pas tyre shënojmë ata elemente të bashkësisë së dytë që nuk i takojnë bashkësisë së parë.

Nga shembulli i mësipërm vërejmë që vlejnë barazimet:

$$A \cup B = B \cup A \text{ (vetia komutative e } \cup \text{)} \text{ dhe}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ (vetia asociative e } \cup \text{)}.$$

Provoni se barazimet e tilla vlejnë edhe për çdo dyshe tjetër, përkatësisht, për çdo treshe tjetër të bashkësive të mësipërme. Po ashtu, nga shembulli 13, b) (shih edhe diagramin në Fig. 4) vërejmë që nëse $A \subseteq B$, atëherë $A \cup B = B$. Është e qartë që (shih diagramin në Fig. 7.) $A \subseteq A \cup B$ dhe $B \subseteq A \cup B$ si dhe $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$.

SHEMBULLI 14.

Të gjendet unioni i bashkësive $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 3 < x \leq 6\}$ dhe $B = \{x \in \mathbf{T} \mid 1 \leq x < 7\}$, ku $\mathbf{N}$ është bashkësia e numrave natyrorë kurse $\mathbf{T}$ është bashkësia e numrave natyrorë tek.

ZGJIDHJE

Së pari gjejmë bashkësitë A dhe B e pastaj unionin e tyre. Meqë $A = \{4, 5, 6\}$ dhe $B = \{1, 3, 5\}$, përfundojmë që $A \cup B = \{4, 5, 6, 1, 3\} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Prerja e bashkësive. Prerja e bashkësive A dhe B quhet bashkësia që përbëhet prej elementeve që i takojnë të dy bashkësive A dhe B , d.m.th. bashkësia që përbëhet prej elementeve të përbashkët të bashkësive A dhe B ; shënohet me $A \cap B$. Pra:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \in B\}.$$

Në figurën 9 (pjesa e hijezuar) është paraqitur prerja e bashkësive A dhe B me anën e diagramit të Venit

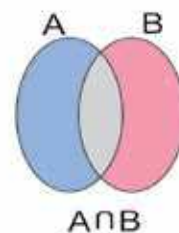


Fig. 9.

SHENBULLI 15.

a) Në qoftë se $A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{5, 6, 7, 9\}$, $D = \{10, 20, 30\}$. Atëherë: $A \cap B = \{4, 5, 7\}$; $A \cap C = \{5, 7\}$; $B \cap C = \{5, 6, 7\}$; $B \cap A = \{4, 5, 7\}$; $A \cap (B \cap C) = \{1, 3, 4, 5, 7\} \cap \{5, 6, 7\} = \{5, 7\}$; $(A \cap B) \cap C = \{4, 5, 7\} \cap \{5, 6, 7, 9\} = \{5, 7\}$; $A \cap D = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$ sepse bashkësia D nuk ka asnjë element të përbashkët me asnjërën nga bashkësitë A , B , C .

b) Në qoftë se $A = \{x, y, z\}$ dhe $B = \{x, y, z, u, v\}$, atëherë $A \subseteq B$ dhe $A \cap B = A$.

Në figurën 10 janë paraqitur prerjet $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ dhe $A \cap D$ të bashkësive nga Shembulli 14 a) me anën e diagrameve të Venit.

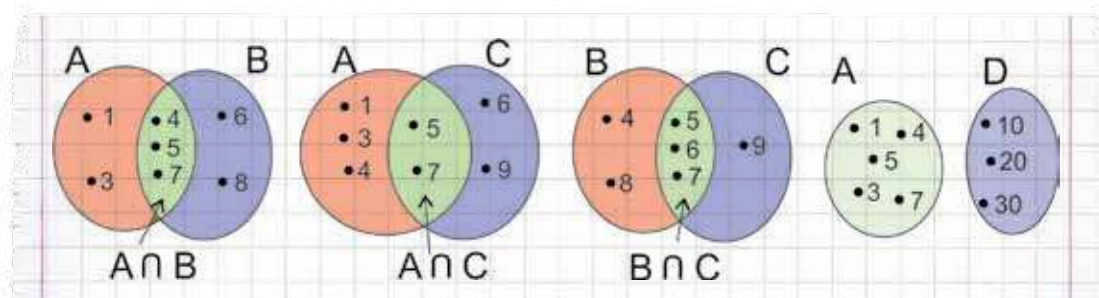


Fig. 10

Nga Shembulli 14, a) vërejmë që vlejné barazimet:

$$A \cap B = B \cap A \text{ (vetia komutative e } \cap \text{) dhe} \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ (vetia asociative e } \cap \text{)}.$$

Provoni se barazimet e tilla vlejné edhe për çdo dyshe tjetër, përkatësisht, për çdo treshe tjetër të bashkësive të mësipërme. Është e qartë që (shih diagramin në Fig. 6.) $A \cap B \subseteq A$ dhe $A \cap B \subseteq B$ si dhe $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Prerja e bashkësive që nuk kanë elemente të përbashkët është bashkësi e zbrazët (boshe); bashkësitë e tilla quhen **bashkësi joprerëse** ose **disjunkte**. Të tilla janë p.sh. bashkësitë A e D , B e D si dhe C e D nga Shembulli 14, a). Nga Shembulli 14, b) shihet që nëse $A \subseteq B$, atëherë $A \cap B = A$.

SHENBULLI 16.

Në qoftë se A është bashkësia e shkronjave të fjalës *abetarja* kurse B bashkësia e shkronjave të fjalës *dritarja*, të gjendet prerja dhe unioni i tyre

ZGJIDHJE

Meqë $A = \{a, b, e, t, r, j\}$ dhe $B = \{d, r, i, t, a, j\}$, përfundojmë që:

$$A \cap B = \{a, t, r, j\} = \{a, j, r, t\} \text{ dhe } A \cup B = \{a, b, e, t, r, j, d, i\} = \{a, b, d, e, i, j, r, t\}.$$

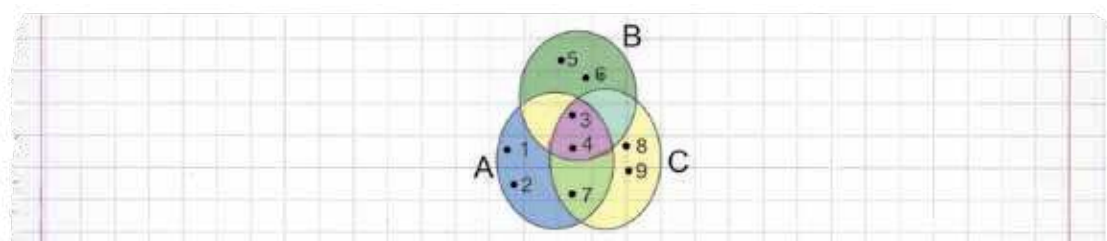


Fig. 11.

(Për shkaqe estetike radhitja e elementeve të bashkësive $A \cap B$ e $A \cup B$ është bërë sipas alfabetit të gjuhës sonë).

SHEMBULLI 17.

Bashkësitë A, B, C janë dhënë me diagramin e Venit të paraqitur në Fig. 11. Bashkëshkësitë A, B, C të shënohen me anën e emërimit dhe të tregohet se vlen:

- a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (vetia distributive e $\cup$ ndaj $\cap$);
- b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (vetia distributive e $\cap$ ndaj $\cup$);

ZGJIDHJE

$A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$; $C = \{3, 4, 7, 8, 9\}$. Meqë: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$, $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cap C = \{3, 4, 7\}$, $B \cap C = \{3, 4\}$ përfundojmë që:
 $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 7\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ dhe $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, kështu që $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 7\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{3, 4, 7\}$ dhe $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 4\} \cup \{3, 4, 7\} = \{3, 4, 7\}$, prej nga shihet që $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ndryshimi (diferenca) i bashkësive. *Ndryshimi (diferenca)* i bashkësisë A me bashkësinë B është bashkësia e të gjithë lementeve të bashkësisë A që nuk i takojnë bashkësisë B ; shënohet me $A \setminus B$. Pra:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \notin B\}.$$

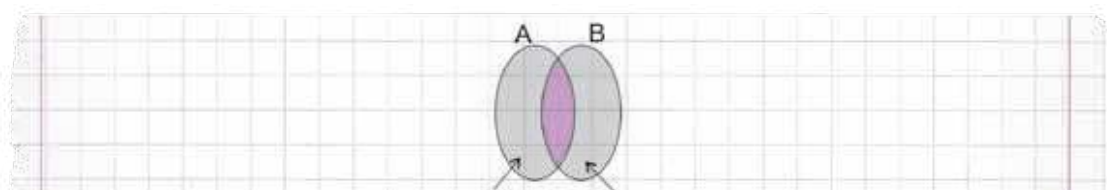


Fig. 12.

SHEMBULLI 18.

a) Në qoftë se $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, atëherë: $A \setminus B = \{a, b\}$; $B \setminus A = \{e, f\}$; $A \cap B = \{c, d\}$; $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$; $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = \{a, b, c, d\} = A$; $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = \{c, d, e, f\} = B$;

b) Në qoftë se $A = \{a, b, c\}$ dhe $B = \{a, b, c, d, e\}$, atëherë $A \subseteq B$, $A \setminus B = \emptyset$.

Në figurën 13 bashkësitë nga Shembulli 18, a) si dhe ato nga Shembulli 18, b) janë paraqitur me anën e diagrameve të Venit.

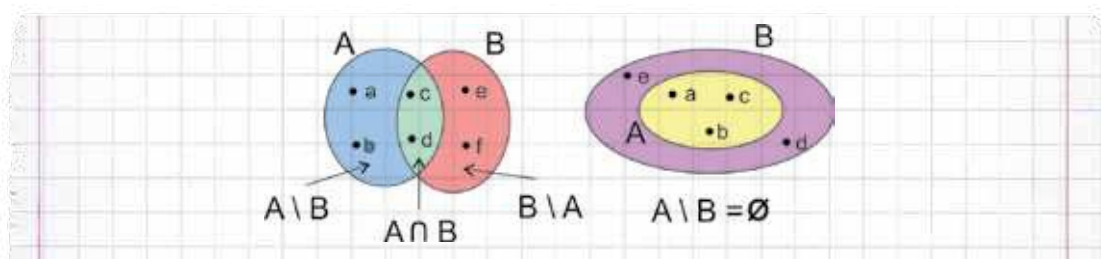


Fig. 13

Siç vërehet nga Shembulli 18, a) (si dhe nga Fig. 13), $A \setminus B$ dhe $B \setminus A$ janë bashkësi të ndryshme, d.m.th. $A \setminus B \neq B \setminus A$ (bile, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, d.m.th. janë disjunkte) si dhe $A \setminus B \subseteq A$, $B \setminus A \subseteq B$. Nga Shembulli 17, a) (si dhe nga Fig. 12 e Fig. 13) shihet që vlejné këto barazime:

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A; (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset; (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset;$$

$$(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B; (B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Nga Shembulli 18, b) rrjedh që nëse $A \subseteq B$, atëherë $A \setminus B = \emptyset$. Është e qartë që $A \setminus A = \emptyset$ dhe $A \setminus \emptyset = A$.

SHEMBULLI 19.

Në qoftë se A është bashkësia e nxënësve të një klase dhe B bashkësia e djemëve të asaj klase, atëherë:

$$A \setminus B = V \text{ është bashkësia e vajzave të asaj klase dhe } V \subseteq A;$$

$$A \setminus V = B \text{ është bashkësia e djemëve të asaj klase dhe } B \subseteq A;$$

$B \cup (A \setminus B) = B \cup V = A$ (unioni i bashkësisë B të djemëve dhe bashkësisë V të vajzave të një klase është bashkësia A e të gjithë nxënësve të asaj klase).

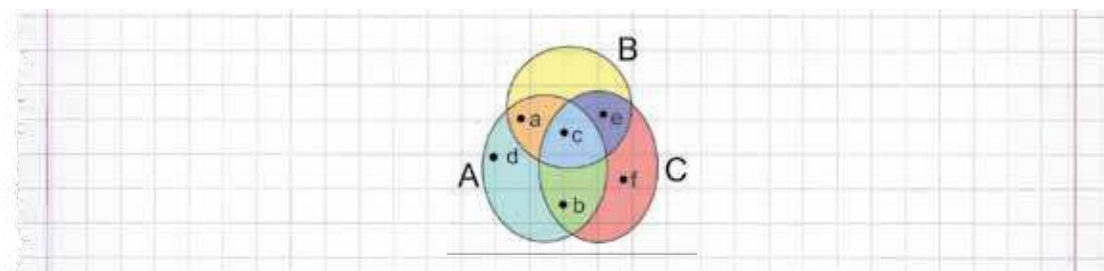


Fig. 14

$B \cap (A \setminus B) = B \cap V = \emptyset$ (prerja e bashkësisë B të djemëve dhe bashkësisë V të vajzave të një klase është bashkësi e zbrazët). Nënbashkësitë e tilla B , V të bashkësisë A (për të cilat vlen $B \cup V = A$ dhe $B \cap V = \emptyset$) quhen **nënbashkësi plotësuese** të bashkësisë A .

SHEMBULLI 20.

Janë dhënë bashkësitë $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, e\}$ dhe $C = \{b, c, e, f\}$. Bashkësitë e dhëna të paraqiten me diagramin e Venit dhe të tregohet se vlen barazimi $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

ZGJIDHJE

Diagrami i Venit për bashkësitë e dhëna është vizatuar në Fig. 14. Meqë $B \setminus C = \{a, c, e\} \setminus \{b, c, e, f\} = \{a\}$, $A \setminus B = \{a, b, c, d\} \setminus \{a, c, e\} = \{b, d\}$, $A \cap C = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, e, f\} = \{b, c\}$, përfundojmë që: $A \setminus (B \cap C) = \{a, b, c, d\} \setminus \{a\} = \{b, c, d\}$ dhe $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \{b, d\} \cup \{b, c\} = \{b, c, d\}$, prej nga rrjedh që $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

SHEMBULLI 21.

Janë dhënë bashkësitë $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, e\}$ dhe $C = \{b, c, e, f\}$. Bashkësitë e dhëna të paraqiten me diagramin e Venit dhe të tregohet se vlen barazimi $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

ZGJIDHJE

Diagrami i Venit për bashkësitë e dhëna është vizatuar në Fig. 14. Meqë $B \setminus C = \{a, c, e\} \setminus \{b, c, e, f\} = \{a\}$, $A \setminus B = \{a, b, c, d\} \setminus \{a, c, e\} = \{b, d\}$, $A \cap C = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, e, f\} = \{b, c\}$, përfundojmë që:
 $A \setminus (B \setminus C) = \{a, b, c, d\} \setminus \{a\} = \{b, c, d\}$ dhe $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \{b, d\} \cup \{b, c\} = \{b, c, d\}$, prej nga rrjedh që $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

SHEMBULLI 22.

Të gjenden bashkësitë A dhe B në qoftë se dihet që :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A \cap B = \{2, 4, 7\} \text{ dhe } A \setminus B = \{5, 8\}.$$

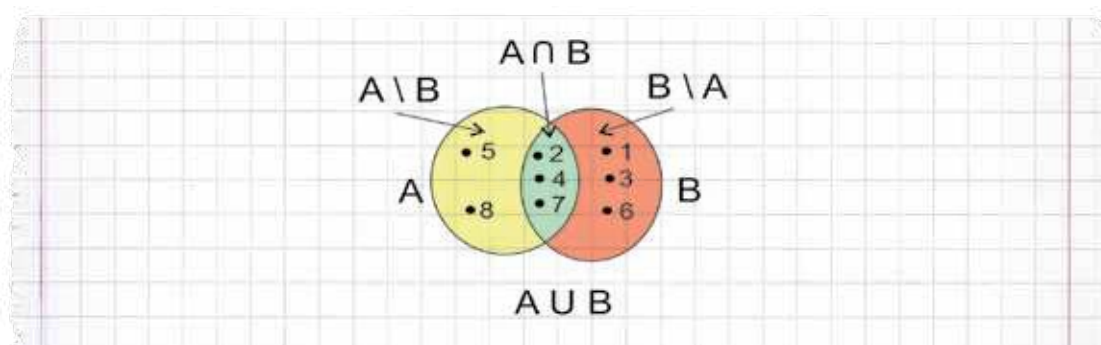


Fig. 15.

ZGJIDHJE

Për zgjidhjen e kësaj detyre shërbehemi me diagramin e Venit. Së pari në pjesën e diagramit që shënon prerjen $A \cap B$ shënojmë elementet 2, 4, 7. Së dyti, në pjesën e diagramit që shënon diferencën $A \setminus B$ shënojmë elementet 5 dhe 8. Në fund, në pjesën e mbetur $B \setminus A$ shënojmë elementet 1, 3, 6 të bashkësisë $A \cup B$ që kanë mbetur pas shënimit të elementeve 2, 4, 7 dhe 5, 8 në dy hapat e parë. Kështu, është plotësuar diagrami i Venit në Fig.15, nga i cili lexohet (shihet) që $A = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ dhe $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$.

! SHEMBULLI 23.

Të shkruhen bashkësitë që iu përgjigjen pjesëve të hijezuara në secilin nga diagramët në figurën 16:

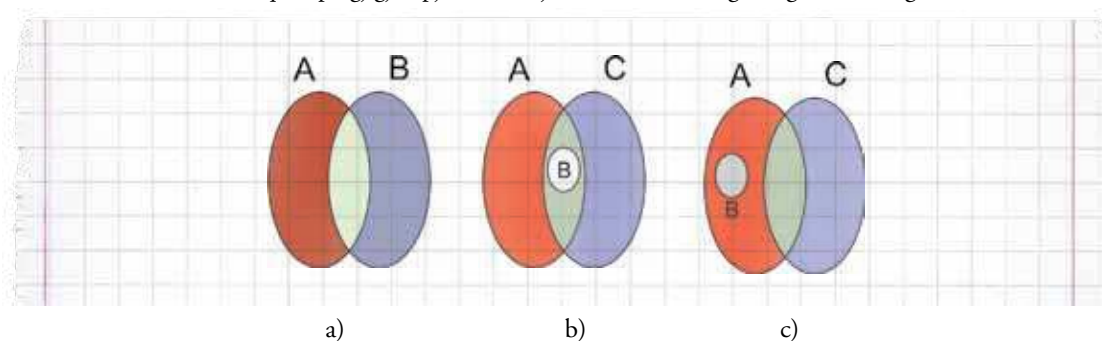


Fig. 16.

! ZGJIDHJE

a) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ose $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$; b) $(A \cap C) \setminus B$; c) $A \cap (B \cup C)$ ose $(A \cap C) \cup B$.

1.4 Çifti i renditur. Prodhimi i drejtpërdrejtë (kartezian) i bashkësive.

Siç dimë bashkësitë $\{a, b\}$ dhe $\{b, a\}$ janë të barabarta, d.m.th. $\{a, b\} = \{b, a\}$, sepse renditja e elementeve në shënimin e bashkësive nuk ka rëndësi. Mirëpo, bashkësia dylementëshe në të cilën renditja e elementeve të saj është e rëndësishme, d.m.th. bashkësia dylementëshe në të cilën dihet se cili është elementi i parë e cili është i dyti quhet çift (dyshe) i renditur dhe shënohet me (a, b) ; a quhet komponenta e parë kurse b komponenta e dytë e çiftit të renditur (a, b) . Edhe pse $\{a, b\} = \{b, a\}$, çiftet e renditur (a, b) dhe (b, a) janë të ndryshme, d.m.th. $(a, b) \neq (b, a)$ sepse a është komponenta e parë e b komponenta e dytë e çiftit të renditur (a, b) kurse b është komponenta e parë e a komponenta e dytë e çiftit të renditur (b, a) . Bashkësinë dylementëshe duhet dalluar nga çifti i renditur ngjashëm siç dallohet p.sh. bashkësia e dy dorëzave të njëjta (të të njëjtës dorë) nga pala (çifti i renditur) e dorëzave të ndryshme (të dy duarve); në rastin e parë nuk është e rëndësishme se të cilës dorë janë ato dy dorëza (të dyja janë ose të dorës së majtë ose të dyja janë të dorës së djathtë) kurse në rastin e dytë

Çiftet e renditura janë të barabarta atëherë dhe vetëm atëherë kur komponentet përkatëse të tyre janë të barabarta. D.m.th.

$$(a, b) = (c, d) \text{ atëherë dhe vetëm atëherë kur } a = c \text{ dhe } b = d$$

SHENBULLI 24.

- a) $(x, y) = (1, 3)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = 1$ dhe $y = 3$;
b) $(2x - 1, 3y - 2) = (x + 3, y - 4)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $2x - 1 = x + 3$ dhe $3y - 2 = y - 4$ d.m.th. atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = 4 \wedge y = -1$.

Përkufizimi. *Prodhimi i drejtpërdrejtë (kartezian)* i bashkësive $A \neq \emptyset$ dhe $B \neq \emptyset$ (në këtë renditje) quhet bashkësia $A \times B$ e të gjitha çiftëve të renditura komponentet e para të të cilave janë nga bashkësia A kurse komponentat e dyta të tyre janë nga B ; d.m.th.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ dhe } b \in B\} \text{ ose } (a, b) \in A \times B \text{ atëherë dhe vetëm atëherë kur } a \in A \text{ dhe } b \in B.$$

SHENBULLI 25.

Në qoftë se $A = \{1, 2, 3\}$ dhe $B = \{a, b\}$ atëherë:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} \text{ dhe}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Prodhimi kartezian i bashkësisë A me vetveten quhet katrori (kartezian) i bashkësisë A dhe shënohet me A^2 , d.m.th. $A \times A = A^2$.

Prodhimi kartezian $A \times B$ mund të paraqitet me anën e diagramit të Venit duke bashkuar me shigjetë çdo pikë të bashkësisë A me çdo pikë të bashkësisë B . P.sh. bashkësia $A \times B$ nga shembulli 25 paraqitet me diagramin vijues të Venit

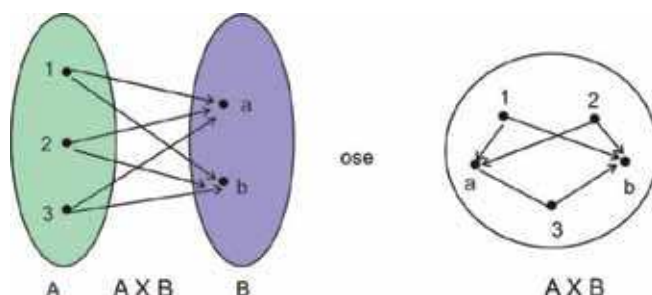


Fig. 17

Po ashtu, prodhimi kartezian $A \times B$ mund të paraqitet edhe si bashkësi e pikave të rrafshit koordinativ koordinatat e të cilave janë pikërisht komponentat e pikave nga $A \times B$. Zakonisht në boshtin e parë koordinativ (boshtin e abshisave) vendosen pikat e faktorit së parë A kurse në boshtin e dytë (boshtin e ordinatave) vendosen pikat e faktorit së dytë B të prodhimit $A \times B$. P.sh. në figurat vijuese janë paraqitur prodhimet $A \times B$ dhe $B \times A$ si bashkësi të rrafshit koordinativ.

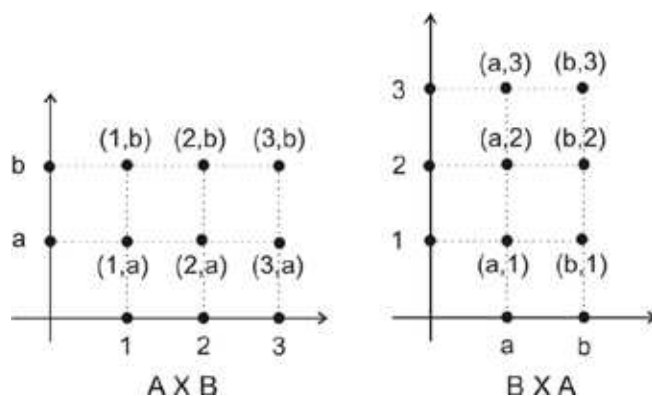


Fig. 18

Nga përkufizimi i prodhimit kartezian të bashkësive (si dhe nga Shembulli 25) shihet se nga $A \neq B$ rrjedh se $A \times B \neq B \times A$ (d.m.th. nuk vlen vetia komutative për $\times$), por $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$ si dhe $n(A^2) = n(A \times A) = n(A) \times n(A) = [n(A)]^2$. Me marrëveshje, do të marrim:

$$A \times \emptyset = \emptyset \text{ dhe } \emptyset \times A = \emptyset.$$

SHEMBULLI 26.

Në qoftë se $A \times B = \{(a, 1), (a, 3), (a, b), (b, 1), (b, 3), (b, b)\}$ të gjenden bashkësitë : a) A ; b) B ;
c) $A \cup B$; ç) $A \cap B$; d) $A \setminus B$; dh) $B \setminus A$.

ZGJIDHJE

Bashkësia A përbëhet nga komponentet e para të çifteve të renditura nga $A \times B$ kurse bashkësia B përbëhet nga komponentet e dyta të çifteve të tilla. Prandaj,

- a) $A = \{a, b\}$; b) $B = \{1, 3, b\}$; Prej këtu, më tej, rrjedh që c) $A \cup B = \{a, b, 1, 3\}$; ç) $A \cap B = \{b\}$;
d) $A \setminus B = \{a\}$; dh) $B \setminus A = \{1, 3\}$.

SHEMBULLI 27.

Në rrafshin koordinativ të vizatohet bashkësia $A \times B$ në qoftë se

- a) $A = \{1, 2\}$, $B = [1, 2]$; b) $A = (1, 2)$, $B = \{1, 2\}$; c) $A = [1, 2]$, $B = (-1, 2]$.

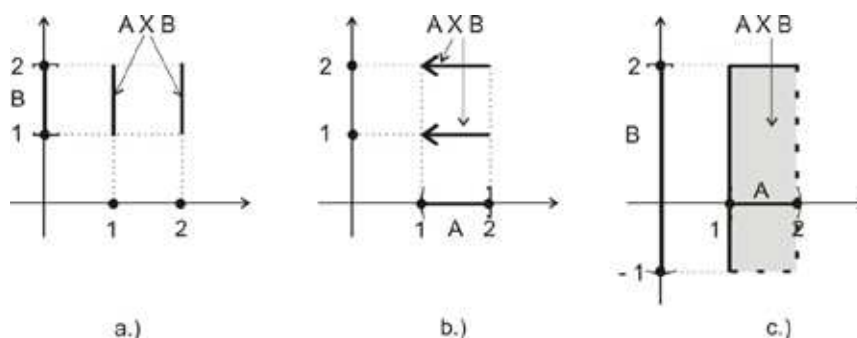


Fig. 19

SHEMBULLI 28

Një person i ka tri palë pantolone – një palë të zi (z), një palë të kaltërt (k), një palë të përhimët (p) dhe tri këmbisha – një të bardhë (b), një të verdhë (v) dhe një të gjelbër (g). Në sa mënyra të ndryshme mund të vishet ai person dhe cilat (kombinime) janë ato ?

ZGJIDHJE

Shënojmë me $P = \{z, k, p\}$ bashkësinë e pantolonave dhe me $K = \{b, v, g\}$ bashkësinë e këmbishave të atij personi. Atëherë,

$$P \times K = \{(z, b), (z, v), (z, g), (k, b), (k, v), (k, g), (p, b), (p, v), (p, g)\}$$

është bashkësia e të gjitha mënyrave (kombinimeve) të mundshme të veshjes së atij personi; p.sh. (z,b) shënon kombinimin e pantallonave të zi me këmbishën e bardhë. Meqë $n(P) = 3$ dhe $n(K) = 3$, përfundojmë që personi në fjalë mund të vishet në $n(P \times K) = n(P) \cdot n(K) = 3 \times 3 = 9$ mënyra të ndryshme.

1.5. Parimi i përfshirje - përjashtimit (për ata që duan të dinë më shumë).

! SHEMBULLI 29.

Le të jenë dhënë bashkësitë $A = \{a, b, c, d, e\}$ dhe $B = \{c, d, e, f, g, h\}$. Atëherë, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A \cap B = \{c, d, e\}$, $A \setminus B = \{a, b\}$ dhe $B \setminus A = \{f, g, h\}$. Në figurën 20 të gjitha këto bashkësi janë paraqitur me diagramin e Venit.

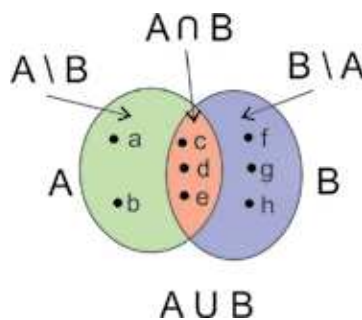


Fig. 20

Le të caktojmë numrin e elementeve të bashkësive A , $A \cap B$ dhe $A \cup B$ dhe të gjejmë një lidhje ndërmjet tyre. Kemi: $n(A) = 5$, $n(B) = 6$, $n(A \cup B) = 8$ dhe $n(A \cap B) = 3$, kështu që $n(A \cup B) = 8 = 5 + 6 - 3 = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, d.m.th. vlen barazimi:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (1)$$

Barazimi i mësipërm arsyetohet kështu: Meqë gjatë numërimit të elementeve të bashkësisë $A \cup B$ elementet e bashkësisë $A \cap B$ numërohen dy herë (njëherë si elemente të bashkësisë A dhe herën e dytë si elemente të bashkësisë B) (shih Fig. 20), përfundojmë që numri $n(A \cup B)$ i elementeve të bashkësisë $A \cup B$ fitohet (është i barabartë) duke “përfshirë” (mbledhur) numrin $n(A)$ të elementeve të bashkësisë A me numrin $n(B)$ të elementeve të bashkësisë B dhe duke “përjashtuar” (zbritur) nga kjo shumë numrin $n(A \cap B)$ të elementeve të bashkësisë $A \cap B$ (prej nga edhe rrjedh emërtimi “parimi i përfshirje-përjashtimit” për barazimin e mësipërm). Nëse bashkësitë A e B janë disjunkte (joprerëse), d.m.th. nëse $A \cap B = \emptyset$, atëherë $n(A \cap B) = n(\emptyset) = 0$, kështu që nga barazimi i mësipërm rrjedh që

$$\text{Nëse } A \cap B = \emptyset, \text{ atëherë } n(A \cup B) = n(A) + n(B). \quad (2)$$

Meqë $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ dhe $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ si dhe $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ dhe $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, duke pasur parasysh barazimet (2) përfundojmë që vlejné edhe këto barazime:

$$n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) \quad (3)$$

$$n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B) \quad (4)$$

Në shembujt vijues do të shohim se si zbatohet “parimi i përfshirje-përjashtimit” (d.m.th. barazimet e mësipërme) në zgjidhjen e detyrave praktike.

SHEMBULLI 30.

Në festivalin “Kosova këndon” kanë marrë pjesë 54 fëmijë nga të gjitha viset e Kosovës. 28 prej tyre kanë kënduar këngë argëtuese kurse 35 prej tyre kanë kënduar këngë popullore. Sa fëmijë kanë kënduar këngë të dy zhanreve (argëtuese dhe popullore) ?

ZGJIDHJE 1.

Nëse me A shënojmë bashkësinë e fëmijëve që kanë kënduar këngë argëtuese dhe me B bashkësinë e fëmijëve që kanë kënduar këngë popullore, atëherë $A \cap B$ është bashkësia e fëmijëve që kanë kënduar këngë të dy zhanreve, kurse $A \cup B$ është bashkësia e të gjithë fëmijëve pjesëmarrës në festival. Në Fig. 21 është paraqitur zgjidhja e detyrës me anën e diagramit të Venit në të cilin në vend të elementeve të bashkësive përkatëse është shënuar numri i elementeve të bashkësive të tilla. Diagrami i tillë është plotësuar kështu: së pari në pjesën e diagramit që paraqet bashkësinë $A \cap B$ është shënuar numri $9 = (28 + 35) - 54$; pastaj në pjesën e diagramit që paraqet bashkësinë $A \setminus B$ është shënuar numri $19 = 28 - 9$ dhe, në fund, në pjesën e diagramit që paraqet bashkësinë $B \setminus A$ është shënuar numri $26 = 35 - 9$.

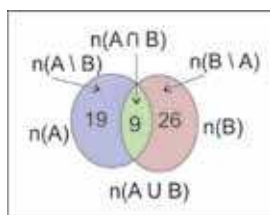


Fig.21

ZGJIDHJE 2.

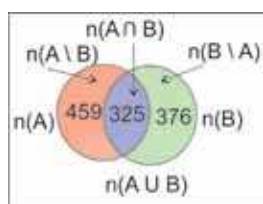


Fig.22

Sipas të dhënave të detyrës dihet që $n(A \cup B) = 54$, $n(A) = 28$ dhe $n(B) = 35$. Kërkohej të gjendet $n(A \cap B)$. Sipas “parimit të përfshirje -përjashtimit” (d.m.th. sipas barazimit (1)) kemi: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, d.m.th. $54 = 28 + 35 - n(A \cap B)$ prej nga rrjedh që $54 = 63 - n(A \cap B)$, kështu që $n(A \cap B) = 63 - 54 = 9$. Pra, 9 fëmijë kanë kënduar këngë të dy zhanreve - argëtuese dhe popullore.

SHEMBULLI 31.

Në një shkollën që ka 1160 nxënës mësohen dy gjuhë të huaja - gjuha angleze dhe ajo gjermane. Dihet që secili nxënës e mëson të paktën njëren nga këto dy gjuhë si dhe që 325 nxënës i mësojnë që të dy gjuhët. Në qoftë se gjuhën angleze e mësojnë 784 nxënës, sa nxënës e mësojnë :

- a) gjuhën gjermane? b) vetëm gjuhën angleze ? c) vetëm gjuhën gjermane?

! ZGJIDHJE 1.

Le të jetë A bashkësia e nxënësve që e mësojnë gjuhën angleze dhe B bashkësia e nxënësve që e mësojnë gjuhën gjermane. Meqë secili nxënës i shkollës e mëson të paktën njërin nga këto dy gjuhë, $A \cup B$ është bashkësia e të gjithë nxënësve të shkollës. $A \cap B$ është bashkësia e nxënësve që i mësojnë të dy gjuhët, $A \setminus B$ është bashkësia e nxënësve që e mësojnë vetëm gjuhën angleze kurse $B \setminus A$ është bashkësia e nxënësve që e mësojnë vetëm gjuhën gjermane. Sipas të dhënave të detyrës dihet që $n(A \cup B) = 1160$, $n(A \cap B) = 325$ dhe $n(A) = 784$; kërkohet të gjendet:

$$\text{a) } n(B); \quad \text{b) } n(A \setminus B); \quad \text{c) } n(B \setminus A).$$

Meqë sipas parimit të përfshirje-përrjashtimit vlen barazimi (1):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \text{ kemi } 1160 = 784 + n(B) - 325 \text{ prej nga rrjedh që } n(B) = 1160 - 784 + 325 = 701. \text{ Pra, a) } n(B) = 701 \text{ nxënës e mësojnë gjuhën gjermane.}$$

Sipas barazimit (3) vlen $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) = 784 - 325 = 459$, kështu që b) $n(A \setminus B) = 459$ nxënës e mësojnë vetëm gjuhën angleze.

Sipas barazimit (4) vlen $n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B) = 701 - 325 = 376$, d.m.th. c) $n(B \setminus A) = 376$ nxënës e mësojnë vetëm gjuhën gjermane.

! ZGJIDHJE 2.

Në Fig. 22 është paraqitur zgjidhja e detyrës me anën e diagramit të Venit ku në vend të elementeve të bashkësive përkatëse janë shënuar numrat e elementeve të bashkësive të tilla.

Së pari në vendin që shënon prerjen $A \cap B$ është vendosur numri i dhënë $n(A \cap B) = 325$. Pastaj, në vendin që shënon ndryshimin $A \setminus B$ është vendosur numri 459 ($= 784 - 325$) dhe në fund, në vendin që shënon ndryshimin $B \setminus A$ është vendosur numri 376 ($= 1160 - 784$).

! SHEMBULLI 32.

a) Në qoftë se bashkësia A i ka 5 elemente, bashkësia B i ka 8 elemente dhe $A \cap B$ i ka 3 elemente, atëherë sa elemente i ka bashkësia $A \cup B$?

b) Në qoftë se A i ka 7 elemente, B i ka 5 elemente dhe $A \cup B$ i ka 9 elemente, atëherë sa elemente i ka bashkësia $A \cap B$?

c) Në qoftë se $A \setminus B$ i ka 4 elemente, $B \setminus A$ i ka 3 elemente dhe $A \cap B$ i ka 2 elemente, atëherë sa elemente i kanë bashkësitë A , B dhe $A \cup B$?

! ZGJIDHJE

a) Meqë $n(A) = 5$, $n(B) = 8$ dhe $n(A \cap B) = 3$, sipas barazimit (1) gjejmë që $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 8 - 3 = 10$, d.m.th $A \cup B$ i ka 10 elemente.

b) Meqë $n(A) = 7$, $n(B) = 5$, dhe $n(A \cup B) = 9$, nga barazimi (1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ rrjedh që $9 = 7 + 5 - n(A \cap B)$, prej nga $n(A \cap B) = 3$, d.m.th. $A \cap B$ i ka 3 elemente.

c) Meqë $n(A \setminus B) = 4$, $n(B \setminus A) = 3$ dhe $n(A \cap B) = 2$, sipas barazimeve (2) dhe (3) kemi: $n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) = 4 + 2 = 6$; $n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B) = 3 + 2 = 5$.

Tash, sipas barazimit (1) kemi: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 5 - 2 = 9$; ose $n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) = 4 + 2 + 3 = 9$.

Pra, bashkësia A i ka 6 elemente, B i ka 5 elemente dhe $A \cup B$ i ka 9 elemente.

1.6. Relacionet

Ndërmjet elementeve të dy bashkësive (ose një bashkësie) mund të vendosen marrëdhënje (raporte) të ndryshme. Kështu p.sh. në bashkësinë e fëmijëve të një familjeje mund të shihen raportet “është vëlla i”, “është motër e”, “është më i madh se”, “është më i vogël se”, “është më i gjatë se”, etj. Raportet e tilla në matematikë luajnë një rol të rëndësishëm dhe janë shembuj të një kuptimi – kuptimit të relacionit, të cilin do ta studiojmë në vazhdim.

SHEMBULLI 33.

Le të jetë A bashkësia e katër qyteteve: Prishtina, Shkupi, Zagrebi, Lubjana, Tirana, kurse B bashkësia e këtyre shteteve: Shqipëria, Maqedonia, Kosova, Kroacia, Slovenia, d.m.th. $A = \{\text{Prishtina, Shkupi, Zagrebi, Lubjana, Tirana}\}$ dhe $B = \{\text{Shqipëria, Maqedonia, Kosova, Kroacia, Slovenia}\}$. Në diagramin vijues (Fig. 23)

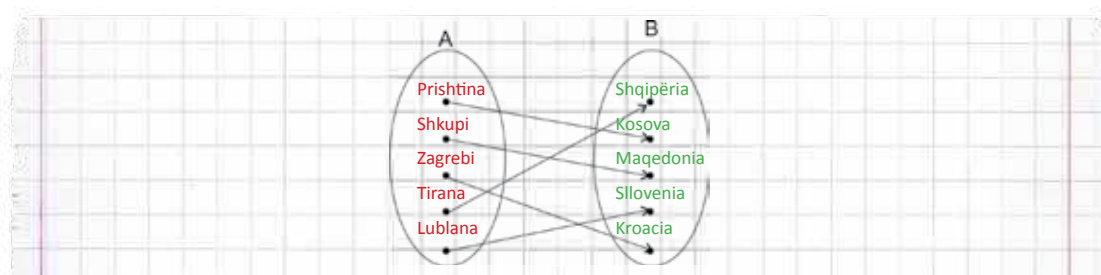


Fig. 23

qytetit x nga bashkësia A i është shoqëruar (është lidhur me shigjetë) shteti y nga bashkësia B që për kryeqytet e ka qytetin x . Kështu, p.sh. Prishtinës $\in A$ i është shoqëruar Kosova $\in B$; Shkupit $\in A$ i është shoqëruar Maqedonia $\in B$, etj. Themi që, në këtë mënyrë, është përkufizuar relacioni “është kryeqytet i” të cilin po e shënojmë, p.sh. me shkronjën R . Pra, për elementet (qytetin) $x \in A$ dhe (shtetin) $y \in B$ shënojmë:

$x R y$ atëherë dhe vetëm atëherë kur (qyteti) x është kryeqytet i (shtetit) y

ose:

$(x, y) \in R$ atëherë dhe vetëm atëherë kur (qyteti) x është kryeqytet i (shtetit) y

d.m.th.

$R = \{(x, y) : (\text{qyteti}) x \in A \text{ është kryeqytet i (shtetit)} y \in B\} = \{(\text{Prishtina, Kosova}), (\text{Shkupi, Maqedonia}), (\text{Zagrebi, Kroacia}), (\text{Lubjana, Slovenia}), (\text{Tirana, Shqipëria})\}$.

Nga ky shembull shihet që relacioni R i bashkësisë A në bashkësinë B mund të shihet si bashkësi e çifteve të renditura elementet e parë të të cilëve i takojnë bashkësisë A kurse elementet e dytë i takojnë bashkësisë B .

SHENBULLI 34.

Le të jetë $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dhe $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Shënojmë me S relacionin e bashkësisë A në bashkësinë B i cili numrit $x \in A$ ia shoqëron dyfishin e tij $y = 2x \in B$. D.m.th. për $x \in A$ dhe $y \in B$ vejmë

$x S y$ atëherë dhe vetëm atëherë kur y “është dyfishi” i x , ose:
 $(x, y) \in S$ atëherë dhe vetëm atëherë kur y “është dyfishi” i x .

Pra: $S = \{(x, y) : (\text{numri } y \in B \text{ është dyfishi (numrit) } x \in A)\} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$. Relacioni i tillë S është paraqitur grafikisht me diagramin e Venit në Fig. 24.

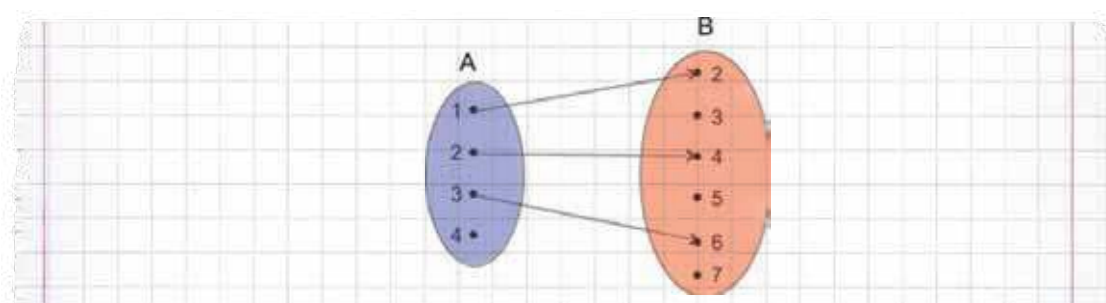


Fig. 24

SHENBULLI 35.

Le të jetë A bashkësia e fëmijëve të dy bashkëshortëve. Nëse Arta (a), Blerimi (b), Ceni (c) dhe Doruntina (d) janë të gjithë fëmijët e asaj familjeje, relacioni R në bashkësinë A i përkufizuar me

$(x R y) \Leftrightarrow (x \text{ është motër e } y), (x, y \in A),$

të shkruhet si bashkësi e çifteve të renditura të elementeve nga A .

ZGJIDHJE

Vërejmë që $A = \{a, b, c, d\}$ dhe që:

- $a R b$ sepse Arta (a) është motër e Blerimit (b), kështu që $(a, b) \in R$;
- $a R c$ sepse Arta (a) është motër e Cenit (c), kështu që $(a, c) \in R$;
- $a R d$ sepse Arta (a) është motër e Doruntinës (d), kështu që $(a, d) \in R$;
- $d R a$ sepse Doruntina (d) është motër e Artës (a), kështu që $(d, a) \in R$;
- $d R b$ sepse Doruntina (d) është motër e Blerimit (b), kështu që $(d, b) \in R$;
- $d R c$ sepse Doruntina (d) është motër e Cenit (c), kështu që $(d, c) \in R$;

Prandaj, $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}$. Relacionin e tillë R e paraqesim grafikisht me diagramin e Venit në Fig. 25. Vëreni që ky relacion elementeve të bashkësisë A iu shoqëron elemente nga po ajo bashkësi; prandaj themi që R është relacion në bashkësinë A (në ven që të themi se R është relacion i bashkësisë A në bashkësinë A). Këtë relacion mund ta paraqesim grafikisht, edhe duke e paraqitur bashkësinë A me anën e diagramit të Venit dhe duke bashkuar me shigjetë elementet e saj që janë në relacionin R (shih Fig. 26). Grafi i tillë quhet *digraf* (ose *graf i drejtuar*) i relacionit R .

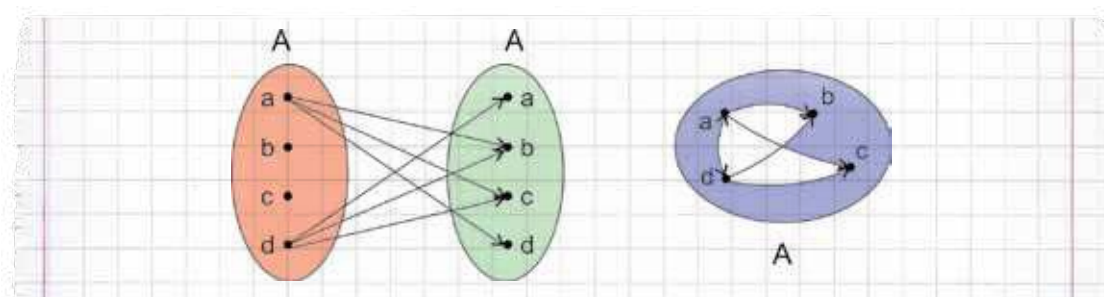


Fig. 25

Fig. 26

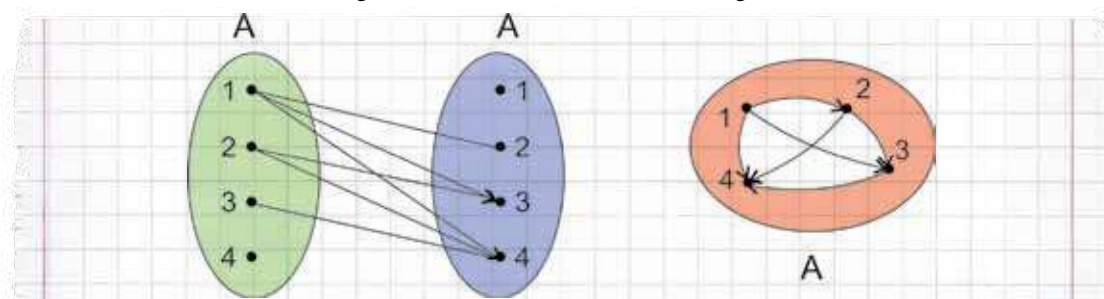


Fig. 27

Fig. 28.

SHEMBULLI 36.

Në bashkësinë $A = \{1, 2, 3, 4\}$ është dhënë relacioni R me diagramin e Venit në Fig. 27 ose me digrafin në Fig. 28. Relacionin i tillë R të paraqitet si bashkësi e çifteve të renditura dhe të përshkruhet me fjalë.

ZGJIDHJE

Nga Fig. 24 (ose 25) shihet që: $1 R 2$, $1 R 3$, $1 R 4$, $2 R 3$, $2 R 4$, $3 R 4$; ose $(1,2) \in R$, $(1,3) \in R$, $(1,4) \in R$, $(2,3) \in R$, $(2,4) \in R$, $(3,4) \in R$, d.m.th.

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}.$$

Vërmë që për numrat $x, y \in A$ vlen:

$x R y$ atëherë dhe vetëm atëherë kur x "është më i vogël se" y , d.m.th.
 $(x, y) \in R$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x < y$.

! SHEMBULLI 37.

Le të jetë $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dhe B bashkësia e ekuacioneve $e_1: x + 2 = 5$, $e_2: 2x = 6$, $e_3: x - 1 = 0$, $e_4: x : 3 = 2$, d.m.th. $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Le të jetë R relacioni i bashkësisë A në bashkësinë B i cili çdo numri $x \in A$ ia shoqëron ekuacioni $e \in B$ zgjidhje e të cilit është numri x , d.m.th. për $x \in A$ dhe $e \in B$ vejmë:

$(x, e) \in R$ ose $x R e$ atëherë dhe vetëm atëherë kur x "është zgjidhje" e ekuacionit e .

Meqë $x = 1$ është zgjidhje e ekuacionit $e_3: x - 1 = 0$ (sepse $1 - 1 = 0$), përfundojmë që $(1, e_3) = (1, x - 1 = 0) \in R$. Ngjashëm, meqë $x = 3$ është zgjidhje e ekuacioneve $e_1: x + 2 = 5$ (sepse $3 + 2 = 5$) dhe $e_2: 2x = 6$ (sepse $2 \cdot 3 = 6$), përfundojmë që $(3, e_1) = (3, x + 2 = 5)$ dhe $(3, e_2) = (3, 2x = 6)$. Në fund, meqë $x = 6$ është zgjidhje e ekuacionit $e_4: x : 3 = 2$ (sepse $6 : 3 = 2$), përfundojmë që $(6, e_4) = (6, x : 3 = 2) \in R$. Përfundimisht:

$$R = \{(1, e_3), (3, e_1), (3, e_2), (6, e_4)\} = \{(1, x - 1 = 0), (3, x + 2 = 5), (3, 2x = 6), (6, x : 3 = 2)\}.$$

Grafiku i relacionit të mësipërm R është paraqitur me diagramin e Venit në Fig. 29.

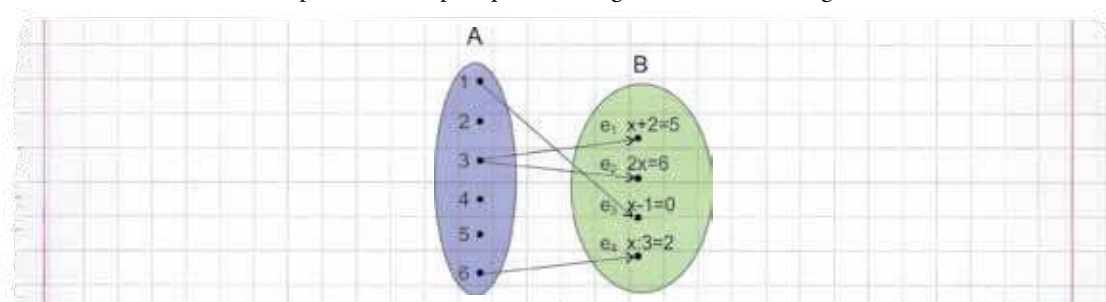


Fig. 29.

II. Numrat natyrorë dhe veprimet me ta

Nuk e dimë saktësisht kur kanë filluar të numërojnë paraardhësit tonë, por të gjeturat arkeologjike sugjerojnë se, fillimisht, kanë shfrytëzuar për këtë qëllim, objekte të ndryshme si: shkopinj, eshtra, vizatimet në muret e shpellave, etj. Simbolet e para abstrakte që shënojnë numrat datojnë nga para 6000-7000 vjetësh. Paraqitja e këtyre simboleve ka rezultuar fillimisht me zhvillimin e kuptimit të numrave të plotë, pastaj edhe të numrave racionalë dhe bashkësive të tjera numerike. E gjithë kjo është motivuar nga nevoja e njerëzve që të mbajnë shënim për pasurinë e vet dhe të bëjnë tregëti me njëri-tjetrin. Paraardhësit tonë ka zhvilluar kuptimin e matjes së gjatësisë dhe të sipërfaqes për të qenë në gjendje t'i përcaktojnë kufijtë e tokave, të mbjellin bimë dhe, më vonë, të projektojnë dhe të ngrehin ndërtesa. Megjithatë, nuk mund të thuhet me siguri se kur këto aktivitete janë shndërruar në numerike, pikërisht kur është vënë lidhja në mes të njësive matëse dhe atyre numerike.

Ndërkaq, në kohën e sotme numri është baza e çdo veprimi të tillë, prandaj planet dhe programet mësimore fillojnë me numra natyrorë, që mund të shoqërohen me gishtërinj dhe objekte nga natyra, për ta përplotësuar të kuptuarit, gradualisht, me numrat negativë, numrat racionalë dhe numrat realë. Të kuptuarit e numrave natyrorë dhe të veprimeve me ta është në përputhje me aftësitë kognitive të fëmijëve të moshës deri në 6-7 vjeçare sepse ndërlidhet me qasjen diskrete të të numëruarit, përderisa numri real ngërthen në vete kuptimin e vazhdueshmërisë që është më i përshtatshëm për matjen e gjatësive dhe sipërfaqeve.

2.1 Kuptimi i numrit natyror dhe numërorit.

Numrat **një, dy, tre, katër, ...**, me të cilët numërojmë gjësende të ndryshme quhen **numra natyrorë** dhe ata shënohen, përkatësisht, me simbolet 1, 2, 3, 4,

Vërejmë që **numri është emër kuptimi**; simboli me të cilin shënohet numri quhet **numrorë**. Kështu p.sh. 1, 2, 4, 6, 15, 25 janë **numrorët** që shënojnë, përkatësisht, numrat *një, dy, katër, gjashtë, pesëmbëdhjetë, njëzetetëpesë*. Në vazhdim do të njejtësojmë (identifikojmë) numrin me numrorin përkatës dhe do të themi numri 1, numri 2, numri 6, numri 15, etj.

Bashkësinë e numrave natyrorë e shënojmë me **N**, d.m.th.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Numrin e elementeve të bashkësisë boshe e quajmë **zero** dhe e shënojmë me 0, d.m.th. $n(\emptyset)=0$. Bashkësinë $\mathbf{N} \cup \{0\}$ e shënojmë me **N₀**, d.m.th.

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

dhe e quajmë bashkësinë e **numrave të plotë (jonegativë)**. Vërejmë që $0 \notin \mathbf{N}$. Bashkësia **N₀** është bashkësia numerike brenda të cilës zhvillohet pothuajse e gjithë matematika (arithmetika) e shkollës fillore (kl. I – kl. V). Në vazhdim me fjalën numër do të kuptojmë numrin e plotë (jonegativ).

Do të dallojmë këto nënbashkësi të bashkësisë **N₀** :

- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ – bashkësia e numrave të dhjetëshës së parë;
- $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ – bashkësia e numrave të dhjetëshës së dytë;
- $\{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$ – bashkësia e numrave të dhjetëshës së tretë;

$\{81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90\}$ bashkësia e numrave të dhjetëshës së nëntë;
 $\{91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$ bashkësia e numrave të dhjetëshës së dhjetë;
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bashkësia e numrave njëshifrorë;
 $\{10, 11, 12, 13, \dots, 99\}$ bashkësia e numrave dyshifrorë;
 $\{100, 101, 102, \dots, 999\}$ bashkësia e numrave treshifrorë;
 $\{1000, 1001, 1003, \dots, 9999\}$ bashkësia e numrave katëreshifrorë, etj ;
 $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ bashkësia e numrave tek;
 $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ bashkësia e numrave çift.

2.2. Krahësimi i numrave natyrorë dhe renditja e tyre.

Le të jenë dhënë bashkësitë: a) $A = \{a, b, c, d\}$ dhe $B = \{u, v, x, y\}$.

b) $A = \{a, b, c\}$ dhe $B = \{u, v, x, y, z\}$;

Bëjmë shoqërimin (çiftimin) një për një të elementeve të bashkësive të tilla:

a) $a \leftrightarrow u, b \leftrightarrow v, c \leftrightarrow x, d \leftrightarrow y$;

b) $a \leftrightarrow u, b \leftrightarrow v, c \leftrightarrow x$;

Shoqërimet e tilla mund ti paraqesim grafikisht me anën e diagrameve si në Fig. 1. :

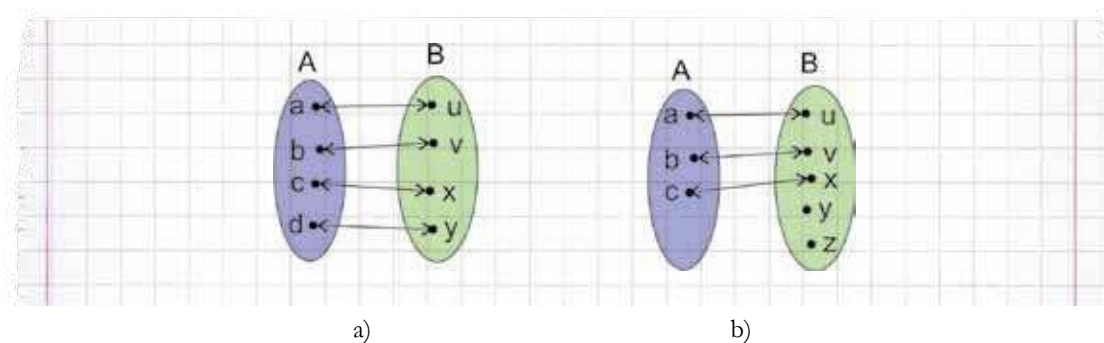


Fig. 1.

Vërejmë që në rastin:

a) çdo elementi të bashkësisë A i është shoqëruar nga një dhe vetëm një element i bashkësisë B dhe, anasjelltas, çdo elementi të bashkësisë B i është shoqëruar nga një dhe vetëm një element i bashkësisë A ; Me këtë rast themi që ndërmjet elementeve të bashkësisë A dhe B është vendosur një korespondencë bijektive dhe bashkësitë e tilla quhen të **barasvlerëshme (ekuivalente)**. Po ashtu, themi që bashkësia A ka **po aq** elemente **sa** ka edhe bashkësia B dhe shënojmë $n(A) = n(B)$. Pra:

$n(A) = n(B)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur A dhe B janë bashkësi ekuivalente.

(Në rastin a) është $n(A) = 4$ dhe $n(B) = 4$, prandaj $4 = 4$).

b) çdo elementi të bashkësisë A i është shoqëruar nga një dhe vetëm një element i bashkësisë B , por elementeve y dhe z të bashkësisë B nuk i është shoqëruar asnjë element i bashkësisë A . Në këtë rast themi që është vendosur një

korespondencë injektive e bashkësisë A në bashkësinë B . Po ashtu, themi që bashkësia A ka **më pak** elemente **se** bashkësia B ; shënojmë $n(A) < n(B)$ dhe themi që numri $n(A)$ është **më i vogël se** numri $n(B)$. Vëreni që ndërmjet bashkësisë A dhe nënbashkësisë $B_1 = \{u, v, x\} \subseteq B$ është vendosur një korespondencë bijektive. Pra:

$n(A) < n(B)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur A është ekuivalente me një nënbashkësi $B_1 \subseteq B$

Në veçanti, **nëse $A \subseteq B$, atëherë $n(A) < n(B)$.**

Në qoftë se $n(A) < n(B)$ themi, po ashtu, që numri $n(B)$ është **më i madh se** numri $n(A)$ dhe shënojmë $n(B) > n(A)$. (Në rastin **b**) është $n(A) = 3$ dhe $n(B) = 5$, prandaj $3 < 5$ ose $5 > 3$).

Për numrat natyrorë vlen: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$

Renditja e tillë quhet *renditja e zakonshme e numrave natyrorë*, kurse 1, 2, 3, 4, ..., quhet *vargu i numrave natyrorë*. Prej këtui shihet që:

- 0 është më i vogël se çdo numër natyror;
- 1 është numri më i vogël natyror;
- nuk ekziston numri më i madh natyror.

Numrat natyrorë dhe numri 0 paraqiten me anë të pikave të një gjysmëdrejtëze kështu: fillimin e gjysmëdrejtëzës e shënojmë me pikën O dhe pastaj në atë gjysmëdrejtëz caktojmë me radhë pikat $A, B, C, Ç, D, \dots$ të baraslanguara njëra nga tjetra. Pikave të tilla $O, A, B, C, Ç, D, \dots$ me radhë iu shoqërojmë numrat (numrorët) 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... (shih Fig. 2). Gjysmëdrejtëza e tillë quhet **bosht numerik**.

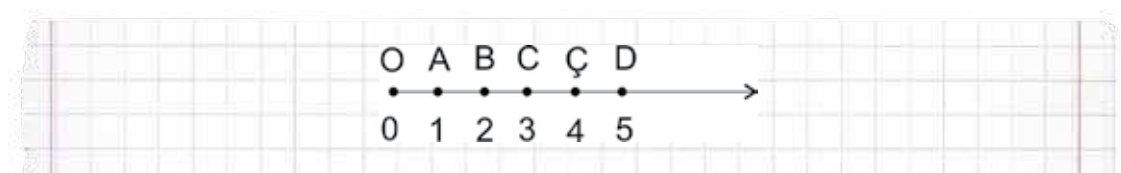


Fig. 2.

Ndër dy numra natyrorë më i vogël është ai që, në vargun e numrave natyrorë, qëndron para tjetrit. Po ashtu, **ndër dy numra natyrorë më i vogël është ai të cilit, në boshtin numerik, i përgjigjet pika e cila qëndron para pikës që i përgjigjet numrit tjetër.** Kështu p.sh. $4 < 6$; $3 < 14$; $2 < 9$; $18 > 10$, $27 > 21$.

Numri 1 është *paraardhës i drejtpërdrejtë* i numrit 2 kurse 2 është *pasardhës i drejtpërdrejtë* i 1; 2 është *paraardhës i drejtpërdrejtë* i 3; 3 është *pasardhës i drejtpërdrejtë* i 2 e kështu me radhë. Vërejmë që çdo numër natyrorë e ka pasardhësin e tij të drejtpërdrejtë në bashkësinë $\mathbf{N}$ kurse çdo numër natyrorë, i ndryshëm nga 1, e ka paraardhësin e drejtpërdrejtë në $\mathbf{N}$. (Numri 1 nuk ka paraardhës të drejtpërdrejtë në $\mathbf{N}$ sepse $0 \notin \mathbf{N}$).

! SHEMBULLI 1.

- a) Rreth tavolinës është ulur e gjithë familja dhe asnjë karrigë nuk është e zbrazët. Ç'mund të thuhet për bashkësinë e anëtarëve të asaj familjeje dhe për bashkësinë e karrigave? (*Përgjigja:* Bashkësia e anëtarëve të familjes është e barasvlerëshme me bashkësinë e karrigave. Familja ka aq anëtarë sa është numri i karrigave).
- b) Çdo anëtar i familjes e ka përpara një pjatë dhe disa pjata tjera janë në një anë të tavolinës. Ç'mund të thuhet për bashkësinë e anëtarëve të familjes dhe për bashkësinë e pjatave? (*Përgjigja:* Bashkësia e anëtarëve të familjes është e barasvlerëshme (ekuivalente) me një nënbashkësi të bashkësisë së pjatave. Prandaj, ka më shumë pjata se sa anëtarë të familjes.)
- c) Një bari i kohëve të lashta nuk dinte të numëronte e as të shkruante. Si mendoni të ketë vepruar bariu për të ditur se a i kishte kthyer në mbrëmje të gjitha delet e nxjerra në mëngjes? (*Përgjigja:* Në mëngjes, për çdo dele të nxjerrë nga shtalla, bariu shtinte një guralec në strajcën e tij. Në mbrëmje, për çdo dele që fuste në shtallë, bariu hiqte një guralec nga strajca e tij. Nëse në strajcë nuk i mbetej asnjë guralec, bariu konstatonte se kishte kthyer të gjitha delet; nëse në strajcë i mbetej ndonjë guralec, atëherë ai dinte se i kishte humbur aq dele sa ishte numri i guralecave të mbetur në strajcë).

2.1. Krahasoni i dy numrave të shkruar (numrorëve)

Dy numra të ndryshëm, të shkruar me shifra, mund të krahasohen sipas dy rregullave vijuese.

2.1.1. Njëri nga numrat ka më shumë shifra se tjetri.

Prej dy numrave të shkruar me numër të ndryshëm shifrash më i vogël (më i madh) është ai që ka më pak (më shumë) shifra se tjetri.

! SHEMBULLI 2.

Të krahasohen numrat a) 13256 dhe 214587; b) 1125678 dhe 9854

! ZGJIDHJE

- a) $13256 < 214587$ sepse 13256 i ka 5 shifra kurse 214587 i ka 6 shifra);
b) $1125678 > 9854$ sepse 1125678 i ka 7 shifra kurse 9854 i ka 4 shifra.

2.1.2 Dy numrat kanë numër të njëjtë shifrash.

Në këtë rast, duke filluar nga e majta, krahasojmë shifrat e të njëjtit rend, derisa të gjejmë dy shifra të ndryshme: *më i vogël është ai që ka këtë shifër (të parën të ndryshme) me vlerë më të vogël.*

! SHEMBULLI 3.

Të krahasohen numrat a) 43786 dhe 43912; b) 324675 dhe 324312.

! ZGJIDHJE

a) Numrat 43786 dhe 43912 kanë numër të njëjtë shifrash. Dy shifrat e para të tyre janë të njëjta; shifra e parë e ndryshme e tyre është shifra e tretë dhe kjo të numri i parë është 7, kurse të numri i dytë është 9. Meqë $7 < 9$, përfundojmë që $43786 < 43912$.

b) Të dy numrat 324675 dhe 324312 kanë nga 6 shifra. Tri shifrat e para i kanë të njëjta. Shifra e parë e ndryshme e tyre është shifra e katërt. Shifra e katërt e numrit 324675 është 6 kurse shifra e katërt e numrit 324312 është 3. Meqë $6 > 3$, përfundojmë që $324675 > 324312$.

! SHEMBULLI 4.

Të shkruhet numri më i madh, që formohet duke përdorur vetëm një herë shifrat 2, 8, 6, 3.
(Përgjigja: 8632).

! SHEMBULLI 5.

Cili është numri më i madh **a)** treshifrorë; **b)** treshifrorë me shifra të ndryshme.
(Përgjigja: **a)** 999; **b)** 987).

! SHEMBULLI 6.

Të renditen sipas madhësisë, duke filluar nga më i vogli, numrat 3948, 3927, 11223, 7589, 113251, 113156.

! ZGJIDHJE

3948, 3927 dhe 7589 i kanë nga 4 shifra. Sipas rregullës 2 për ta vlen $3927 < 3948 < 7589$. Sipas rregullës 1, secili nga këta numra është më i vogël se numri pesëshifrorë 11223, prandaj $3927 < 3948 < 7589 < 11223$. Numrat 113251 dhe 113156 janë gjashtëshifrorë dhe, sipas rregullës 2, vlen $113156 < 113251$, kështu që, përfundimisht, kemi: $3927 < 3948 < 7589 < 11223 < 113156 < 113251$.

2.1.3. Shkrimi dhe leximi i numrave (numërorëve).

Dimë që dhjetë numrat (numërorët) e parë natyrorë shkruhen me shifrat

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Por, edhe të gjithë numërorët tjerë natyrorë shkruhen me anën e shifrave të mësipërme.

Numri *dhjetë shkruhet me numërorin 10* në të cilin shifra e parë nga e djathta 0 tregon se ai i ka 0 njëshe kurse shifra e dytë nga e djathta 1 tregon se ai e ka 1 dhjetëshe.

Për të njëjtën arsye, numrat *njëzet*, *tridhjetë*, *katërdhjetë* (*dyzet*), *pesëdhjetë*, *gjashtëdhjetë*, *shtatëdhjetë*, *tetëdhjetë*, *nëntëdhjetë* shkruhen, përkatësisht, me numërorët 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Nërkaq, numri *pesëdhjetë e shtatë* shkruhet me numërorin 57 në të cilin shifra 7 paraqet 7 njëshe kurse shifra 5 tregon se ai i ka 5 dhjetëshe. Ngjashëm shkruhen edhe numrat tjerë dyshifrorë.

Numri *njëqind* shkruhet me numërorin 100, në të cilin shifra e parë nga e djathta 0 tregon se ai nuk ka (i ka 0) njëshe, shifra e dytë nga e djathta 0 tregon se ai i ka 0 dhjetëshe kurse shifra 1 tregon se ai e ka 1 qindëshe. Ngjashëm, numrat *dyqind*, *treqind*, ..., *nëntëqind* shkruhen, përkatësisht me numërorët 200, 300, ..., 900. Numri *katërqind e shtatëdhjetë e tetë* shkruhet me numrorin 478 në të cilin shifra e parë nga e djathta 8 tregon numrin e njësheve, shifra e dytë nga e djathta 7 tregon numrin e dhjetësheve kurse shifra e tretë nga e djathta 4 tregon numrin e qindësheve.

Siç vërehet nga shembujt e mësipërm, secila shifër e numërorit e ka vlerën e vet varësisht nga vendi që ka në atë numërorë; vlera e tillë quhet **vendvlerë e asaj shifre**. Kështu p.sh. numri *dy mijë e shtatëqind e pesëdhjetë e katër* shënohet me numërorin 2754 në të cilin shifra e parë nga e djathta 4 paraqet 4 njëshe dhe e ka vlerën 4; shifra e dytë nga e djathta 5 tregon se numri i dhënë i ka 5 dhjetëshe dhe ajo e ka vlerën 50; shifra e tretë nga e djathta 7 paraqet numrin e qindësheve dhe e ka vlerën 700; shifra e katërt nga e djathta 2 paraqet numrin e mijësheve dhe e ka vlerën 2000. Kështu mund të shkruajmë $2754 = 2000 + 700 + 50 + 4$. Ngjashëm, numri *njëqind e njëzet e pesë mijë e gjashtëqind e tridhjetë e shtatë* shkruhet me numërorin 125637 në të cilin shifra e parë nga e djathta 7 paraqet 7 njëshe dhe e ka vlerën 7; shifra e dytë nga e djathta 3 paraqet 3 dhjetëshe dhe e ka vlerën 30; shifra e tretë nga e djathta 6 paraqet 6 qindëshe dhe e ka vlerën 600; shifra e katërt nga e djathta 5 paraqet 5 mijëshe dhe e ka vlerën 5000; shifra e pestë nga e djathta 2 paraqet 2 dhjetëmijëshe dhe e ka vlerën 20000 dhe, në fund, shifra e gjashtë nga e djathta 1 paraqet 1 njëqind mijëshe dhe e ka vlerën 100000. Prandaj mund të shkruajmë $125637 = 100000 + 20000 + 5000 + 600 + 30 + 7$.

Që të shkruhet më lehtë numërori dhe të lexohet më lehtë numri përkatës, atë numërorë e ndajmë në klasa dhe secilën klasë e ndajmë në nga tre rende sipas tabelës vijuese:

KLASAT	KLASA E MILIARDEVE			KLASA E MILIONEVE			KLASA E MIJËSHEVE			KLASA E NJËSHEVE		
Rendet	QMd	DHMD	Md	QMI	DHMI	MI	QM	DHM	M	Q	DH	NJ
Shembull	3	5	7	9	0	2	1	9	5	7	8	1
Shembull		8	2	0	3	1	7	5	0	2	4	2

Siç shihet nga tabela, duke filluar nga e djathta në të majtë, kemi **klasën e njësheve**, **klasën e mijësheve**, **klasën e milioneve**, **klasën e miliardeve** (po të vazhdonim më tej do të kishim **klasën e trilioneve**, **klasën e kuatër-lioneve**, **kuintilionëve** etj.); secila nga këto klasa është e ndarë në nga tri rende: duke filluar nga e djathta në të majtë, klasa e njësheve është e ndarë në **rendet e njësheve** (NJ), **dhjetësheve** (DHJ) dhe **qindësheve** (Q); klasa e mijësheve është ndarë në **rendet e mijësheve** (MI), **dhjetëmijësheve** (DHMI) dhe **qindmijësheve** (QMI); klasa e milioneve është e ndarë në **rendet e milioneve** (MI), **dhjetëmilioneve** (DHMI) dhe **qindmilioneve** (QMI); klasa e miliardeve është ndarë në **rendet e miliardeve** (Md), **dhjetëmiliardëve** (DHMD) dhe **qindmiliardëve** (QMD).

Në dy rreshtat e fundit të tabelës janë dhënë dy numërorë shifrat e të cilëve janë të ndara nëpër klasat dhe rendet përkatëse. Kështu, numrori 357 902 195 781 paraqet numrin treqind e pesëdhjetë e shtatë miliard e nëntëqind e dy milion e njëqind e nëntëdhjetë e pesë mijë e shtatëqind e tetëdhjetë e një, ndërkaq, numrori 82 031 750 242 paraqet numrin tetëdhjetë e dy miliard e tridhjetë e një milion e shtatëqind e pesëdhjetë mijë e dyqind e katërdhjetë e dy.

Për t' u lexuar më lehtë preferohet që, duke filluar nga e djathta, numërorët shumëshifrorë të ndahen në nga tri shifra (d.m.th. në klasa) me një hapësirë të vogël (pa presje ose pika !).

SHMBOLI 7.

Në mbështetje të tabelës, numri

- a) *treqind mijë e pesëdhjetë* shkruhet me numrorin 300 050, d.m.th. 300050;
- b) *një milion e shtatëqind mijë e tetë* shkruhet me numrorin 1 700 008, d.m.th. 1700008;
- c) *një miliard e dyqind e një milion e pesëqind e tridhjetë e pesë* shkruhet me numrorin 1 201 000 535 d.m.th. 1201000535;
- ç) *dhjetë miliard e dhjetë mijë e dhjetë* shkruhet me numrorin 10 000 010 010 d.m.th. 10000010010.
- d) *treqind e tre miliard e dyqind e pesëdhjetë e tre milion e njëqind mijë e pesëmbëdhjetë* shkruhet me numrorin 303 253 100 015 d.m.th. 303253100015.

SHMBOLI 8.

Të lexohen numrat e paraqitur me numërorët a) 33300; b) 100701; c) 25003206; ç) 100023043; d) 1458579245; dh) 257839001960

ZGJIDHJE

Së pari, duke filluar nga e djathta, numërorët e dhënë i ndajmë (me nga një hapësirë ndërmjet) në klasa, d.m.th. në nga tri shifra e pastaj, sipas tabelës së dhënë më sipër, i lexojmë numrat e dhënë me ata numërorë.

- a) 33 300 lexohet *tridhjetë e tre mijë e treqind*;
- b) 100 070 lexohet *njëqind mijë e shtatëdhjetë*;
- c) 25 003 206 lexohet *njëzetë e pesë milion e tre mijë e dyqind e gjashtë*;
- ç) 100 023 043 lexohet *njëqind milion e njëzetë e tre mijë e katërdhjetë e tre*.
- d) 1 458 579 245 lexohet *një miliard e katërqind e pesëdhjetë e tetë milion e pesëqind e shtatëdhjetë e nëntë mijë e dyqind e katërdhjetë e pesë*.
- dh) 303 203 100 015 lexohet *treqind e tre miliard e dyqind e tre milion e njëqind mijë e pesëmbëdhjetë*.

SHMBOLI 9.

Të shkruhet dhe të lexohet numri që ka:

- a) 3 qindëshe dhe 2 njëshe;
- b) 2 mijëshe, 8 qindëshe, 5 dhjetëshe dhe 4 njëshe;
- c) 4 dhjetë mijëshe, 8 qindëshe dhe 2 njëshe;
- ç) 3 qind mijëshe, 8 dhjetë mijëshe, 7 qindëshe dhe 5 njëshe;
- d) 8 miliardëshe, 2 qind milionëshe, 5 milionëshe, 9 qind mijëshe, 2 dhjetëshe dhe 5 njëshe.

Vërejtje: Rendet që mungojnë nënkuptohen që janë të barabarta me 0; kështu p.sh. numri në rastin

- d) duhet nënkuptuar që ka 8 miliardëshe, 2 qind milionëshe, 0 dhjet milionëshe, 5 milionëshe, 9 qind mijëshe, 0 dhjetë mijëshe, 0 mijëshe, 0 qindëshe, 2 dhjetëshe dhe 5 njëshe.

! ZGJIDHJE

- a) 302; *treqind e dy*; b) 2854; *dy mijë e tetëqind e pesëdhjetë e katër*; c) 40802; *katërdhjetë mijë e tetëqind e dy*; ç) 380705; *treqind e tetëdhjetë mijë e shtatëqind e pesë*;
d) 8205900025; *tetë mijardë e dyqind e pesë milion e nëntëqind mijë e njëzetë e pesë*.

2.1.4. Veprimet me numra natyrorë.

2.1.4.1. Mbledhja.

Veprimi i mbledhjes $+$ (lexohet *plus*), çdo dy numrave natyrorë a dhe b iu shoqëron një numër të vetëm natyror s , të cilin e quajmë **shumë** e numrave a dhe b dhe e shënojmë me $a + b$, d.m.th. për çdo $a \in \mathbf{N}$ dhe çdo $b \in \mathbf{N}$ ekziston numri i vetëm $s \in \mathbf{N}$ i tillë që

$$a + b = s.$$

Në këtë rast a quhet **mbledhori i parë**, b quhet **mbledhori i dytë** kurse s quhet **shuma** e mbledhorëve a e b . (Këtu me shkronjat a , b , s , etj. kemi shënuar numrat natyrorë; kështu do të veprojmë shpesh edhe në vazhdim). Kështu, kemi:

$$\text{Mbledhori i parë} + \text{Mbledhori i dytë} = \text{shuma}$$

Vëreni që *shuma e çdo dy numrave natyrorë është numër natyror*.

Themi po ashtu që numri $a + b$ është **për b më i madh se** numri a ose **për a më i madh se** numri b .

! SHEMBULLI 10.

- a) $3 + 2 = 5$ lexohet *3 plus 2 bëjnë (është baras me) 5*; 2 dhe 3 janë mbledhorët kurse 5 është shuma e tyre.
b) $17 + 25 = 42$ d.m.th. që shuma e numrave 17 dhe 25 është numri 42; 17 është mbledhori i parë, 25 është mbledhori i dytë.
c) Shuma e numrave 3 dhe 6 është numri $3 + 6 = 9$; shuma e numrave 25 dhe 39 është numri $25 + 39 = 64$; shuma e numrave m dhe n është numri $m + n$.
ç) Cili është numri:
për 3 më i madh se numri 6? (Përgjigja: $3 + 6 = 9$);
për 8 më i madh se x ? (Përgjigja: $x + 8$ ose $8 + x$);
për m më i madh se numri n ? (Përgjigja: $m + n$ ose $n + m$).

Vetitë të thjeshta të mbledhjes. Meqë p.sh. $8 + 9 = 17$ dhe $9 + 8 = 17$, përfundojmë që $8 + 9 = 9 + 8$. Po ashtu, nga $(6 + 5) + 7 = 11 + 7 = 18$ dhe $6 + (5 + 7) = 6 + 12 = 18$ rrjedh që $(6 + 5) + 7 = 6 + (5 + 7)$. Është e qartë që $7 + 0 = 7$ dhe $0 + 7 = 7$. Edhe në rastin e përgjithshëm, për numrat e çfarëdoshëm natyrorë a , b , c vlejné këto veti:

$a + b = b + a$	(vetia e ndërrimit (komutative))
$(a + b) + c = a + (b + c)$	(vetia e shoqërimit (asociative))
$a + 0 = a, 0 + a = a$	(vetia e mbledhjes me zero)
Nëse $a + b = s$, atëherë $(a + c) + b = s + c$ dhe $a + (b + c) = s + c$ (Nëse njëri mbledhorë rritet për një numër, atëherë edhe shuma rritet për atë numër) (Nga kjo veti rrjedh vetia asociative).	

Këto veti shfrytëzohen shpesh në mbledhjen e numrave shumëshifrorë duke plotësuar ata deri në dhjetëshe, qindëshe, mijëshe, dhjetëmijëshe, ..., të plota si në mbledhjet pa kalim ashtu edhe në mbledhjet me kalim të dhjetëshes, qindëshes, mijëshes, dhjetëmijëshes, E ilustrojmë këtë në shembujt vijues, ku mbledhja është krye në disa mënyra të ndryshme.

SHMBOLI 11.

a) 1. $36 + 23 = (30 + 6) + (20 + 3) = (6 + 30) + (20 + 3)$ (sipas vetisë së ndërrimit)
 $= 6 + (30 + 20) + 3$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 6 + 50 + 3 = 6 + 3 + 50$ (vetia e ndërrimit)
 $= 9 + 50 = 59$; ose

2. $36 + 23 = (30 + 6) + 23 = 30 + (6 + 23)$ (sipas vetisë së ndërrimit)
 $= 30 + 29 = 59$; ose

3. $36 + 23 = 36 + (20 + 3) = (36 + 20) + 3$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 56 + 3 = 59$; ose

4. $36 + 23 = 36 + (4 + 19) = (36 + 4) + 19$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 40 + 19 = 59$.

5. $36 + 23 = (29 + 7) + 23 = 29 + (7 + 23)$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 29 + 30 = 59$.

b) 1. $175 + 368 = 100 + 70 + 5 + 300 + 60 + 8$
 $= (100 + 300) + (70 + 60) + (5 + 8)$ (sipas vetisë së ndërrimit)
 $= 400 + 130 + 13 = 530 + (10 + 3) = (530 + 10) + 3$ (vetia e shoqërimit)
 $= 540 + 3 = 543$; ose

2. $175 + 368 = (170 + 5) + (360 + 8) = 170 + (5 + 360) + 8$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 170 + (360 + 5) + 8$ (sipas vetisë së ndërrimit)
 $= (170 + 360) + (5 + 8)$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 530 + 13 = 543$; ose

3. $175 + 368 = 175 + (300 + 60 + 8) = (175 + 300) + (60 + 8)$ (vetia e shoqërimit)
 $= 475 + (60 + 8) = (475 + 60) + 8$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 535 + 8 = 543$;

4. $175 + 368 = 175 + (25 + 343) = (175 + 25) + 343$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 200 + 343 = 543$.

c) $124564 + 35896 = (100000 + 20000 + 4000 + 500 + 60 + 4) + (30000 + 5000 + 800 + 90 + 6) =$
 $100000 + (20000 + 30000) + (500 + 800) + (60 + 90) + (4 + 6)$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 100000 + 50000 + 1300 + 150 + 10 = 100000 + 51300 + 160 = 151460$.

! SHEMBULLI 12.

Të gjendet shuma e numrave $a + 5$, $b + 7$ dhe $c + 9$, ku $a, b, c \in \mathbf{N}$.

! ZGJIDHJE

$$\begin{aligned}(a + 5) + (b + 7) + (c + 9) &= (a + b) + (5 + 7) + (c + 9) \text{ (sipas vetisë së ndërrimit)} \\ &= a + b + 12 + c + 9 = a + b + c + 12 + 9 \text{ (sipas vetisë së ndërrimit)} \\ &= a + b + c + 21.\end{aligned}$$

2.1.4.2. Zbritja.

Veprimi i zbritjes - (lexohet minus), çdo dy numrave natyrorë a, b të tillë që $a > b$, iu shoqëron numrin e vetëm natyror n i cili quhet *ndryshimi* (*ndryshesa*) e numrave a dhe b dhe shënohet me $a - b$. D.m.th. Për çdo $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, $a > b$, ekziston numri i vetëm $n \in \mathbf{N}$ i tillë që

$$a - b = n.$$

Numri a quhet ***i zbritshmi***, b quhet ***zbritësi*** kurse n quhet ***ndryshimi*** ose ***ndryshesa*** e numrave a dhe b .

$$I \text{ zbritshmi} - \text{zbritësi} = \text{ndryshimi}$$

Thuhet që numri $a - b$ është ***për b më i vogël se*** numri a .

! SHEMBULLI 13.

a) $9 - 5 = 4$ lexohet 9 minus 5 bëjnë (është baras me) 5; 9 është i zbritshmi, 5 është zbritësi kurse 4 është ndryshimi i tyre.

b) $39 - 25 = 14$ tregon që 14 është ndryshimi i numrave 39 dhe 25; 39 është i zbritshmi, 25 është zbritësi, 14 është ndryshimi.

c) Ndryshimi i numrave 17 dhe 9 është numri $17 - 9 = 8$; ndryshimi i numrave 125 dhe 67 është numri $125 - 67 = 58$; ndryshimi i numrave p dhe q është numri $p - q$.

ç) Cili është numri :

për 5 më i vogël se numri 14 ? (Përgjigja: $14 - 5 = 9$);

për 3 më i vogël se numri x ? (Përgjigja: $x - 3$);

për x më i vogël se numri 17 ? (Përgjigja: $17 - x$);

për a më i vogël se numri y ? (Përgjigja: $y - a$).

Vëreni që gjithmonë *i zbritshmi është më i madh se zbritësi*. Në të kundërtën, nëse zbritësi është më i madh se i zbritshmi, atëherë ndryshimi nuk është numër natyral. (p.sh. $7 - 9$ nuk është numër natyral). Prandaj, *ndryshimi i çdo dy numrave natyrorë nuk është medoemos numër natyror*.

Veti të thjeshta të zbritjes. Dimë që p.sh. $5 - 0 = 5$ dhe që $5 - 5 = 0$, d.m.th. vlejné këto veti të thjeshta të zbritjes:

Ndryshimi i çdo numri me numrin zero është vet ai numër : $a - 0 = a$.
Ndryshimi i çdo numri me vetveten është i barabartë me zero : $a - a = 0$.
Nuk vlen vetia e ndërrimit (komutative) për zbritjen: $a - b \neq b - a$.

Lidhja ndërmjet mbledhjes dhe zbritjes jepet me vetitë vijuese:

1. Meqë $9 - 4 = 5$ vlen atëherë dhe vetëm atëherë kur $9 = 4 + 5$ ose $9 - 5 = 4$ përfundojmë se:

Me e zbritë numrin b prej numrit a , d.m.th. me e gjetë një numër të tretë n shuma e të cilit me numrin b na jep numrin a . Pra :

1. $a - b = n$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = b + n$ ose $b = a - n$. d.m.th. (i zbritëshmi) - (zbritësi) = ndryshimin atëherë dhe vetëm atëherë kur (i zbritëshmi) = (zbritësi) + (ndryshimi) ose (zbritësi) = (i zbritëshmi) - (ndryshimi)

(Vetia 1 tregon që mbledhja dhe zbritja janë veprime të kundërta). Po ashtu vlen:

2. Meqë $7 + 8 = 15$ vlen atëherë dhe vetëm atëherë kur $7 = 15 - 8$ ose $8 = 15 - 7$, përfundojmë se: Secili mbledhor është i barabartë me ndryshimin e shumës dhe mbledhorit tjetër. Pra:

2. $a + b = s$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = s - b$ ose $b = s - a$ d.m.th. (njëri mbledhor) = (shuma) - (mbledhori tjetër)

Veti të tjera të përbashkëta të mbledhjes dhe zbritjes i ilustrojmë me shembullin vijues

SHENBULLI 14.

Iliri i ka 25 euro kurse Arta 14 euro.

a) Sa euro më shumë se Arta i ka Iliri ?

b) Nëse Ilirit dhe Artës iu japim nga 5 euro, sa euro do t'i ketë Iliri e sa Arta dhe sa euro më shumë se Arta do t'i ketë Iliri në këtë rast ?

c) Nëse Iliri dhe Arta harxhojnë nga 7 euro, sa euro i mbeten secilit dhe sa euro më shumë se Arta do t'i ketë Iliri në këtë rast ?

ç) Nëse Ilirit ia japim edhe 3 euro, sa euro do t'i bëhen Ilirit dhe sa euro më shumë i ka Iliri se Arta, në këtë rast?

d) Nëse Iliri i harxhon 6 euro, sa euro i mbeten Ilirit dhe sa euro më shumë se Arta do t'i ketë Iliri në këtë rast ?

dh) Nëse Artës ia japim 3 euro, sa euro do ti bëhen Artës dhe sa euro më shumë se Arta do t'i ketë Iliri, në këtë rast ?

e) Nëse Arta i harxhon 5 euro, sa euro i mbeten Artës dhe sa euro më shumë se Arta do t'i ketë Iliri në këtë rast ?

Krahasoni rezultatin e fituar në rastin a) me rezultatin e fituar në të gjitha rastet te mësipërme. Çka mund të konstatoni ?

f) Sa euro i kanë së bashku Iliri dhe Arta? Nëse Iliri i fiton edhe 7 euro kurse Arta i harxhon 7 euro, sa euro do të kenë së bashku Iliri dhe Arta ?

g) Nëse Iliri i harxhon 3 euro, sa euro do ti ketë Iliri e sa euro do ti kenë së bashku Iliri dhe Arta ?

! ZGJIDHJE

a) Iliri i ka $25 - 14 = 11$ euro më shumë se Arta.

b) Nëse si Ilirit edhe Artës iu japim nga 5 euro, atëherë Iliri do t'i ketë $25 + 5 = 30$ euro, kurse Arta do t'i ketë $14 + 5 = 19$ euro. Në këtë rast Iliri do të ketë $(25 + 5) - (14 + 5) = 30 - 19 = 11$ euro më shumë se Arta.

Meqë në rastin a) kemi $25 - 14 = 11$ kurse në rastin b) $(25 + 5) - (14 + 5) = 11$, përfundojmë që $(25 + 5) - (14 + 5) = 25 - 14$. Dmth. vlen kjo veti:

3. Në qoftë se të zbritshmit ashtu edhe zbritësit i shtojmë të njëjtin numër, ndryshimi nuk ndryshon. Pra:
 $(a + c) - (b + c) = a - b$.

c) Kur Iliri dhe Arta i harxhojnë nga 7 euro, Ilirit i mbeten $25 - 7 = 18$ euro kurse Artës i mbeten $14 - 7 = 7$ euro dhe në këtë rast Iliri i ka $(25 - 7) - (14 - 7) = 18 - 7 = 11$ euro më shumë se Arta. Duke krahasuar këtë rezultat me rezultatin e rastit a) $25 - 14 = 11$, përfundojmë që $(25 - 7) - (14 - 7) = 11 = 25 - 14$. Prandaj vlen vetia:

4. Nëse si të zbritshmit ashtu edhe zbritësit i zbritet i njëjti numër, ndryshimi nuk ndryshon, d.m.th.
 $(a - c) - (b - c) = a - b$.

ç) Nëse Ilirit ia japim 3 euro, atij do ti bëhen $25 + 3 = 28$ euro dhe ai do të ketë $(25 + 3) - 14 = 28 - 14 = 14$ euro më shumë se Arta. Duke e krahasuar këtë rezultat me rezultatin e rastit a) $25 - 14 = 11$, përfundojmë që:

$$(25 + 3) - 14 = 14 = 11 + 3 = (25 - 14) + 3.$$

Pra, vlen kjo veti:

5. Nëse i zbritshmi rritet për një numër, atëherë edhe ndryshimi rritet për atë numër, d.m.th.
 $(a + c) - b = (a - b) + c$.

d) Nëse Iliri i harxhon 6 euro, atij i mbeten $25 - 6 = 19$ euro dhe ai do të ketë $(25 - 6) - 14 = 19 - 14 = 5$ euro më shumë se Arta. Duke e krahasuar këtë rezultat me rezultatin e rastit a) $25 - 14 = 11$, përfundojmë që:

$$(25 - 6) - 14 = 5 = 11 - 6 = (25 - 14) - 6.$$

Rrjedhimisht, vlen kjo veti:

6. Nëse i zbritshmi zvogëlohet për një numër, atëherë edhe ndryshimi zvogëlohet për atë numër, d.m.th.
 $(a - c) - b = (a - b) - c$.

dh) Nëse Artës ia japim 3 euro, atëherë ajo do të ketë $14 + 3 = 17$ euro kurse, në këtë rast Iliri do të ketë $25 - (14 + 3) = 25 - 17 = 8$ euro më shumë se Arta. Duke e krahasuar këtë rezultat me rezultatin e rastit a) $25 - 14 = 11$, përfundojmë që:

$$25 - (14 + 3) = 8 = 11 - 3 = (25 - 14) - 3.$$

Pra, vlen vetia:

7. Nëse zbritësi rritet për një numër, atëherë ndryshimi zvogëlohet për atë numër, d.m.th.
 $a - (b + c) = (a - b) - c$.

! ZGJIDHJE

e) Nëse Arta i harxhon 5 euro asaj i mbeten $14 - 5 = 9$ euro dhe, në këtë rast Iliri ka $25 - (14 - 5) = 25 - 9 = 16$ euro më shumë se Arta. Duke e krahasuar këtë rezultat me rezultatin e rastit a) $25 - 14 = 11$, përfundojmë që

$$25 - (14 - 5) = 16 = 11 + 5 = (25 - 14) + 5.$$

Kështu, vlen vetia:

8. Nëse zbritësi zvogëlohet për një numër, atëherë ndryshimi rritet për atë numër, d.m.th.
 $a - (b - c) = (a - b) + c$.

f) Iliri dhe Arta së bashku kanë $25 + 14 = 39$ euro. Kur Iliri i fiton 7 euro, ai do të ketë $25 + 7 = 32$ euro; nëse Arta i harxhon 7 euro, ajo do të ketë $14 - 7 = 7$ euro. Në këtë rast Iliri e Arta kanë së bashku $(25 + 7) + (14 - 7) = 32 + 7 = 39$ euro. Duke krahasuar këto dy rezultate, përfundojmë që:

$$(25 + 7) + (14 - 7) = 39 = 25 + 14.$$

Ngjashëm shihet që $(25 - 7) + (14 + 7) = 25 + 14$. Prandaj

9. Nëse njëri mbledhor rritet kurse mbledhori tjetër zvogëlohet për të njëjtin numër, atëherë shuma nuk ndryshon; d.m.th.

$$(a + c) + (b - c) = a + b = (a - c) + (b + c).$$

g) Iliri e Arta së bashku kanë $25 + 14 = 39$ euro. Nëse Iliri i harxhon 6 euro, ai do të ketë $25 - 6 = 19$ euro, kurse së bashku me Artën do të kenë $(25 - 6) + 14 = 19 + 14 = 33$ euro. Kështu, kemi:

$$(25 - 6) + 14 = 33 = 39 - 6 = (25 + 14) - 6.$$

Ngjashëm shihet që vlen edhe: $25 + (14 - 6) = (25 + 14) - 6$.

Përfundojmë që vlen vetia:

10. Nëse njëri mbledhor zvogëlohet për një numër, atëherë edhe shuma zvogëlohet për të njëjtin numër, d.m.th. $(a - c) + b = (a + b) - c = a + (b - c)$.

Duke i shfrytëzuar vetitë e mësipërme kryejmë zbritjen e numrave të ndryshëm shumëshifrorë me dhe pa prishje të dhjetësheve qindësheve, mijësheve, E ilustrojmë këtë me shembullin vijues.

! SHEMBULLI 15.

a) $29 - 8 = (20 + 9) - 8 = 20 + (9 - 8)$ (sipas vetisë 10)
 $= 20 + 1 = 21;$

b) $25 - 9 = 25 - (5 + 4) = (25 - 5) - 4$ (sipas vetisë 7)
 $= 20 - 4 = (10 + 10) - 4 = 10 + (10 - 4)$ (sipas vetisë 10)
 $= 10 + 6 = 16;$

c) $338 - 35 = (300 + 38) - 35 = 100 + (38 - 35)$ (sipas vetisë 10)
 $= 100 + 3 = 103;$

ç) $1.536 - 358 = 536 - (336 + 22) = (536 - 336) - 22$ (sipas vetisë 7)
 $= 200 - 22 = (170 + 30) - 22 = 170 + (30 - 22)$ (sipas vetisë 10)
 $= 170 + 8 = 178;$

$$2. 536 - 358 = 536 - (400 - 42) = (536 - 400) + 42 \text{ (sipas vetisë 8)} \\ = 136 + 42 = 178;$$

$$d) 1. 1236 - 679 = 1236 - (636 + 43) = (1236 - 636) - 43 \text{ (sipas vetisë 7)} \\ = 600 - 43 = (500 + 100) - 43 = 500 + (100 - 43) \text{ (sipas vetisë 10)} \\ = 500 + 57 = 557;$$

$$2. 1236 - 679 = (1236 - 36) - (679 - 36) \text{ (sipas vetisë 4)} \\ = 1200 - 643 = 1200 - (600 + 43) = (1200 - 600) - 43 \text{ (sipas vetisë 7)} = 600 - 43 = 557;$$

$$dh) 256124 - 35013 = (200000 + 56124) - 35013 = 200000 + (56124 - 35013) \text{ (vetia 10)} \\ = 200000 + 21111 = 221111.$$

Vërejtje: Gjithësesi, mbledhja (e disa) dhe zbritja e dy numrave shumëshifrorë më lehtë kryhet në shtyllë, me të cilën gjë, besojmë se, lexuesi është i njohur.

! SHEMBULLI 16.

- a) Në qoftë se një mbledhor është 2456 kurse shuma 15875, të gjendet mbledhori tjetër;
- b) Në qoftë se i zbritëshmi është 98475 kurse ndryshimi 1367, të gjendet zbritësi;
- c) Në qoftë se zbritësi është 3876 kurse ndryshimi 764, të gjendet i zbritëshmi.

! ZGJIDHJE

a) Meqë, sipas vetisë 2, (një mbledhorë) = (shuma) - (mbledhori tjetër), përfundojmë që $15875 - 2456 = 13419$ është mbledhori tjetër. (Prova: $13419 + 2456 = 15875$).

b) Meqë, sipas vetisë 1, (zbritësi) = (i zbritëshmi) - (ndryshimi), përfundojmë që $98475 - 1367 = 97108$ është zbritësi. (Prova: $98475 - 97108 = 1367$).

c) Meqë, sipas vetisë 1, (i zbritëshmi) = (zbritësi) + (ndryshimi), përfundojmë që $3876 + 764 = 4640$ është i zbritëshmi. (Prova: $4640 - 764 = 3876$).

2.1.4.3. Shumëzimi.

! SHEMBULLI 17.

Në dhomën e punës Agroni ka 4 rafte librash. Në secilin raft ai ka vendosur nga 8 libra. Sa libra janë të vendosur në 4 raftet ?

! PËRGJEGJA

Në 4 raftet janë vendosur $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ libra. Shumën e 4 mbledhorëve të njëjtë 8 do ta shënojmë, shkurt, kështu: $4 \cdot 8$, d.m.th.

$$4 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 + 8 = 32,$$

dhe do të themi që numri 32 është rezultat i *shumëzimit* të numrave 4 dhe 8. Pra, **shumëzimi mund të shihet si mbledhje e mbledhorëve të barabartë**.

Kështu, veprimi i *shumëzimit* (lexohet *herë*) çdo dy numrave natyrorë a, b iu shoqëron një numër të vetëm natyror p , të cilin e quajmë *prodhim* të numrave a dhe b dhe e shënojmë me $a \cdot b$, d.m.th. për çdo $a \in \mathbf{N}$ dhe çdo $b \in \mathbf{N}$ ekziston numri i vetëm $p \in \mathbf{N}$ i tillë që

$$a \cdot b = p.$$

Në këtë rast a quhet **faktori i parë** ose *shumëzueshmi*, b quhet **faktori i dytë** ose *shumëzuesi* kurse p quhet **prodhimi** i faktorëve a e b . Pra, kemi:

$$(\text{faktori i parë}) \cdot (\text{faktori i dytë}) = \text{prodhimi}$$

(Nganjëherë në vend të shenjës $\cdot$ përdoret edhe shenja $\times$ (por jo $\times$!)).

Për numrin (prodhimin) $a \cdot b$ themi që është a **herë më i madh se** numri b ose b **herë më i madh se** a . Po ashtu $a \cdot b$ quhet ***a*-fishi** i numrit b ose ***b*-fishi** i numrit a ; **shumëfisha** të një numri a quhen prodhimet e atij numri me numrat 1, 2, 3, 4, ... d.m.th. numrat $1 \cdot a = a, 2 \cdot a = 2a, 3 \cdot a = 3a, 4 \cdot a = 4a, \dots$.

! SHEMBULLI 18.

a) $3 \cdot 4 = 12$ lexohet 3 herë 4 bëjnë (është baras me) 12; 3 dhe 4 janë faktorët kurse 12 është prodhimi i tyre.

b) $9 \cdot 15 = 135$ d.m.th. që prodhimi i numrave 9 dhe 15 është numri 135; 9 është faktori i parë, 15 është faktori i dytë.

c) Prodhimi i numrave 8 dhe 7 është numri $8 \cdot 7 = 56$; prodhimi i numrave 6 dhe m është numri $6 \cdot m = 6m$; prodhimi i numrave m dhe n është numri $m \cdot n = mn$.

ç) Numri $6 \cdot 4 (=24)$ është 6 herë më i madh se numri 4; po ashtu $6 \cdot 4 (=24)$ është 4 herë më i madh se numri 6; $6 \cdot 4 (=24)$ është 6-fishi i numrit 4 dhe 4-fishi i numrit 6.

d) Cili numër është 5 herë më i madh se 8? (ose: cili është 5-fishi i numrit 8?; ose cili është 8-fishi i numrit 5?) (Përgjigja: $5 \cdot 8 = 40$). Cili numër është 3 herë më i madh se numri x ? (ose: cili është 3-fishi i numrit x ?) (Përgjigja: $3 \cdot x = 3x$). Cili është a -fishi i numrit y ? (ose: cili numër është a herë më i madh se y ?) (Përgjigja: $a \cdot y = ay$).

e) Shumëfishat e numrit 3 janë: $1 \cdot 3 = 3, 2 \cdot 3 = 6, 3 \cdot 3 = 9, 4 \cdot 3 = 12, \dots$, d.m.th. 3, 6, 9, 12, Ndërkaq, shumëfisha të numrit 5 janë numrat $1 \cdot 5 = 5, 2 \cdot 5 = 10, 3 \cdot 5 = 15, 4 \cdot 5 = 20, \dots$, d.m.th. 5, 10, 15, 20, 25,

Vetitë të thjeshta të shumëzimit. Meqë p.sh. $7 \cdot 9 = 63$ dhe $9 \cdot 7 = 63$, përfundojmë që $7 \cdot 9 = 9 \cdot 7$. Nga $(3 \cdot 5) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$ dhe $3 \cdot (5 \cdot 4) = 3 \cdot 20 = 60$ rrjedh që $(3 \cdot 5) \cdot 4 = 3 \cdot (5 \cdot 4)$. Po ashtu, $4 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ si dhe $0 \cdot 4 = 0$. Është e qartë që p.sh. $3 \cdot 1 = 3 = 1 \cdot 3$. Edhe në rastin e përgjithshëm, për numrat e çfarëdoshëm natyrorë a, b, c vlejnë këto veti:

$a \cdot b = b \cdot a$ (vetia e ndërrimit (komutative))
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (vetia e shoqërimit (asociative))
$a \cdot 0 = 0, 0 \cdot a = 0$ (vetia e shumëzimit me zero)
$a \cdot 1 = a, 1 \cdot a = a$ (vetia e shumëzimit me një)

❗ SHEMBULLI 19.

a) Arbeni në një dyqan bleu 3 çokollata, kurse në dyqanin tjetër ai bleu edhe 5 çokollata të njëjta. Secila nga çokollatat ka kushtuar nga 2 euro. Sa euro i ka harxhuar Arbeni ? Si mund ta llogarisim shumën që pagoi Arbeni për të gjitha çokollatat ?

b) Një kopshtar nga 1423 kg molla sa kishte vjelur në kopshtin e tij, i shiti 695 kg. mollë. Nëse çmimi i 1 kg mollë është 2 euro, sa euro do të fitoj kopshtari nga mollët e pashitura ? Si do ta llogaritni këtë çmim ?

Zgjidhje. a) Arbeni i ka blerë gjithësejt $3 + 5 = 8$ çokollata. Meqë secila çokollatë ka kushtuar 2 euro, Arbeni ka paguar gjithësejt

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 8 = 16 \text{ euro.}$$

Mirëpo, Arbeni ka llogaritur edhe kështu: në dyqanin e parë për 3 çokollata ka paguar $2 \cdot 3 = 6$ euro kurse në dyqanin e dytë për 5 çokollata ka paguar $2 \cdot 5 = 10$ euro. Prandaj, gjithësejt, Arbeni ka paguar

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16 \text{ euro.}$$

❗ SHEMBULLI 20.

Nga dy llogaritjet që i ka bërë Arbeni rrjedh që vlen:

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5.$$

b) Pas shitjes së 695 kg. mollë kopshtarit i kanë mbetur pa u shitur $1423 - 695 = 728$ kg mollë të cilat, (meqë 1 kg i tyre kushton 2 euro), kushtojnë

$$2 \cdot (1423 - 695) = 2 \cdot 728 = 1456 \text{ euro.}$$

Kopshtari ka mund të llogarisë edhe kështu. Po ti kishte shitur të gjitha mollët d.m.th. 1423 kg, kopshtari do të fitonte $2 \cdot 1423 = 2846$ kurse nga 695 kg mollë të shitura ai ka fituar $2 \cdot 695 = 1390$ euro. Prandaj, kopshtari nga mollët e pashitura do të fitoj

$$2 \cdot 1423 - 2 \cdot 695 = 2846 - 1390 = 1456 \text{ euro.}$$

Duke pasur parasysh llogaritjet e kopshtarit, përfundojmë që vlen barazimi:

$$2 \cdot (1423 - 695) = 2 \cdot 1423 - 2 \cdot 695.$$

Kështu, përfundojmë që vlejnë këto veti që lidhin mbledhjen me shumëzimin dhe zbritjen me shumëzimin:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{dhe} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

(vetitë e shpërndarjes (përdasimit, distributive) të shumëzimit ndaj mbledhjes)

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad \text{dhe} \quad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

(vetitë e shpërndarjes (përdasimit, distributive) të shumëzimit ndaj zbritjes)

Shembulli vijues e ilustron shumëzimin e një numri me njësi dhjetore; (njësi dhjetore quhen numrat 10, 100, 1000, ...).

SHMBOLI 21.

Një punëtori rrobaqepësie prodhon fustane. Një fustan kushton 124 euro. Sa do të fitoj ajo punëtori në qoftë se i prodhon a) 10 ; b) 100; c) 1000; ç) 10000; d) 100000 fustana ?

ZGJIDHJE

- a) 10 fustana kushtojnë $124 \cdot 10 = 1240$ euro;
 b) 100 fustana kushtojnë $124 \cdot 100 = 12400$ euro;
 c) 1000 fustana kushtojnë $124 \cdot 1000 = 124000$ euro;
 ç) 10000 fustana kushtojnë $124 \cdot 10000 = 1240000$ euro;
 d) 100000 fustana kushtojnë $124 \cdot 100000 = 12400000$ euro.

Nga ky shembull shihet që:

Një numër shumëzohet me 10, 100, 1000, 1000, ..., në qoftë se atij numri i prapashkruejmë një, dy, tri, katër, ..., zero, përkatësisht :

$$3 \cdot 10 = 30; 3 \cdot 100 = 300; 3 \cdot 1000 = 3000; 3 \cdot 10000 = 30000$$

Duke ditur tabelën e shumëzimit dhe duke shfrytëzuar vetitë e mësipërme mund të kryhen shumëzimet e numrave të ndryshëm. E ilustruam këtë në shembullin vijues.

SHMBOLI 22.

- a) $30 \cdot 8 = 8 \cdot 30$ (sipas vetisë së ndërrimit)
 $= 8 \cdot (3 \cdot 10) = (8 \cdot 3) \cdot 10$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 24 \cdot 10 = 240.$
- b) $4 \cdot 3000 = 4 \cdot (3 \cdot 1000) = (4 \cdot 3) \cdot 1000$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 12 \cdot 1000 = 12000.$
- c) $8 \cdot 24 = 8 \cdot (20 + 4) = 8 \cdot 20 + 8 \cdot 4$ (sipas vetisë së përdasimit)
 $= 160 + 32 = 192.$
- ç) $4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3 = 4 \cdot (5 \cdot 2) \cdot (8 \cdot 3)$ (sipas vetisë së shoqërimit)
 $= 4 \cdot 10 \cdot 24 = 10 \cdot 4 \cdot 24$ (sipas vetisë së ndërrimit)
 $= 10 \cdot 96 = 960.$
- d) 1. $4782 \cdot 6 = 6 \cdot 4782$ (sipas vetisë së ndërrimit)
 $= 6 \cdot (4000 + 700 + 80 + 2) = 6 \cdot 4000 + 6 \cdot 700 + 6 \cdot 80 + 6 \cdot 2$
 (sipas vetisë së përdasimit)
 $= 24000 + 4200 + 480 + 12 = 28692 ;$
2. $4782 \cdot 6 = (4 \text{ M } 7 \text{ Q } 8 \text{ DH } 2 \text{ NJ}) \cdot 6 = (4 \cdot 6) \text{ M } (7 \cdot 6) \text{ Q } (8 \cdot 6) \text{ DH } (2 \cdot 6) \text{ NJ}$
 $= 24 \text{ M } 42 \text{ Q } 48 \text{ DH } 12 \text{ NJ} = (2 \text{ DHM } + 4 \text{ M}) (4 \text{ M } + 2 \text{ Q}) (4 \text{ Q } + 8 \text{ DH}) (1 \text{ DH } + 2 \text{ NJ})$
 $= 2 \text{ DHM } (4 + 4) \text{ M } (2+4) \text{ Q } (8 + 1) \text{ DH } 2 \text{ NJ} = 2 \text{ DHM } 8 \text{ M } 6 \text{ Q } 9 \text{ DH } 2 \text{ NJ}$
 $= 28692;$

Në zgjidhjen 2 i kemi shumëzuar mijëshet (4), qindëshet (7), dhjetëshet (8) dhe njëshet (2) e faktorit të parë 4782 me faktorin e dytë 6, e pastaj kemi bërë shndërrimet e dhjetësheve në qindëshe, qindësheve në mijëshe

dhe mijësheve në dhjetëmijëshe dhe në fund i kemi mbledhur shifrat e rendeve të njëjta. Veprimet e tilla i tregojmë në mënyrë të përmbledhur kështu:

$$\begin{array}{r} 3. \quad \begin{array}{r} 4782 \\ \cdot 6 \\ \hline 28692 \end{array} \quad \text{ose} \quad \begin{array}{r} 4782 \cdot 6 \\ \hline 28692 \end{array} \end{array}$$

Shumëzimin e numrave shumëshifrorë e ilustruam me shembullin vijues.

! SHEMBULLI 23.

Të gjendet prodhimi i numrave 2354 dhe 26.

Veprojmë kështu: shkruajmë faktorin e parë 2354 dhe përfundi tij faktorin e dytë 26. Në vend të shenjës së barazisë vëmë një vijë horizontale përfundi dy faktorëve.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 2354 \\ \cdot 326 \\ \hline \end{array} \quad \text{ose} \quad \begin{array}{r} 2354 \\ \cdot 326 \\ \hline \end{array} \quad \text{ose} \quad \begin{array}{r} 2354 \cdot 326 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{r} (6 \text{ NJ} \cdot 2354 = 14124 \text{ NJ} \Rightarrow) \quad 14124 \\ (2 \text{ DH} \cdot 2354 = 4708 \text{ DH} \Rightarrow) \quad + 47080 \\ (3 \text{ Q} \cdot 2354 = 7068 \text{ Q} \Rightarrow) \quad 706200 \\ \hline 767404 \end{array} \quad \begin{array}{r} \begin{array}{r} 14124 \\ + 4708 \\ \hline 7062 \end{array} \\ \hline 767404 \end{array} \end{array}$$

Së pari shumëzojmë shifrën e njësheve të faktorit të dytë (shumëzuesit) (6) me faktorin e parë (të shumëzuesmin) 2354 (ngjashëm si në rastin 3 të shembullit 22, dh)) dhe rezultatin (prodhimin) e fituar $14124 \text{ NJ} = 14124$ e shënojmë nën vijën horizontale. Pastaj, shumëzojmë shifrën e dhjetësheve të faktorit të dytë (2) me faktorin e parë 2354 dhe rezultatin e fituar $4708 \text{ DH} = 47080$ e shkruajmë nën prodhimin paraprak. Në fund, shumëzojmë shifrën e qindësheve të faktorit të dytë (3) me faktorin e parë 2354 dhe rezultatin e fituar $7068 \text{ Q} = 706800$ e shkruajmë përfundi prodhimit të fundit. Tash, i mbledhim tri prodhimet e fituara dhe gjejmë rezultatin (prodhimin) përfundimtar 767404 të cilin e shënojmë nën vijën (e dytë) horizontale që shënon barazimin e mbledhjes së tri prodhimeve sipër saj.

Zakonisht, prodhimi i dhjetësheve të faktorit të dytë me faktorin e parë shënohet (pa zeron e fundit) duke lëvizur një shifër majtas; prodhimi i qindësheve të faktorit të dytë me faktorin e parë shënohet (pa dy zerot e fundit) duke lëvizur për dy shifra majtas, etj., siç është shënuar në llogaritjen e mësipërme djathtas.

! SHEMBULLI 24.

Të gjendet prodhimi $724000 \cdot 38000$. Të lexohet numri i fituar !

! ZGJIDHJE

$$724000 \cdot 38000 = 724 \cdot 1000 \cdot 38 \cdot 1000 = 724 \cdot 38 \cdot 1000 \cdot 1000 \\ = (724 \cdot 38) \cdot 1000000.$$

Gjejmë prodhimin $724 \cdot 38$ dhe atij ia prapashkruajmë 6 zero. Meqë:

$$\begin{array}{r} 724 \cdot 38 \\ \hline 5792 \\ + 2172 \\ \hline 27512 \end{array}$$

përfundojmë që $724000 \cdot 38000 = (724 \cdot 38) \cdot 1000000 = 2751200000$. Ky është numri njëzetë e shtatë miliard e pesëqind e dymbëdhjetë milion.

2.1.4.4. Fuqizimi

Prodhimin $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ e quajmë *fuqia e pestë* e numrit 3 dhe e shënojmë me 3^5 , d.m.th. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 (= 243)$. Ngjashëm, nëse a dhe n janë dy numra natyrorë, atëherë *prodhimi i n faktorëve të barabartë me a* quhet **fuqia e n-të e numrit a** dhe shënohet me a^n , d.m.th.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ faktorë}).$$

a quhet *baza* kurse n treguesi (*eksponenti*) i fuqisë a^n . Pra, treguesi n tregon sa herë duhet të shumëzohet baza a me vetveten për të dhënë fuqinë a^n . Fuqia e dytë e numrit a , d.m.th. a^2 quhet edhe *katrori* i numrit a ndërsa fuqia e tretë e numrit a , d.m.th. a^3 quhet edhe *kubi* i numrit a .

! SHEMBULLI 25.

Fuqia e katërt e numrit 5 është $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \cdot 5 = 625$;

Kubi i numrit 16 është $16^3 = 16 \cdot 16 \cdot 16 = 256 \cdot 16 = 4096$;

Fuqia e 7 e numrit 2 është $2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$;

Katrori i numrit 4 është $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ kurse katrori i numrit 123 është

$$123^2 = 123 \cdot 123 = 15129.$$

Vërejtje. 1) *Fuqitë e njësht:* $1^1=1$; $1^2=1 \cdot 1=1$; $1^5=1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1=1$, etj.

Pra, *të gjitha fuqitë e njësht janë të barabarata me 1.*

2. *Fuqitë e dhjetës:* $10^1=10$; $10^2=10 \cdot 10=100$; $10^4=10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10=10000$.

Po ashtu: $10^5=100000$; $10^7=10000000$, etj. Prandaj, *fuqia e numrit dhjetë është e barabartë me numrin që shkruhet me një 1 dhe aq zero në të djathtë të tij sa është treguesi i fuqisë.*

3. *Çdo numër, i ndryshëm nga zero, në fuqinë zero, me marrëveshje, do ta konsiderojmë të barabartë me 1* d.m.th. për çdo $a \neq 0$, me marrëveshje vejmë $a^0=1$. Kështu p.sh. $3^0=1$; $25^0=1$; $254^0=1$.

! SHEMBULLI 26.

- a) $2500000 = 25 \cdot 100000 = 25 \cdot 10^5$;
b) $4720000000 = 472 \cdot 10000000 = 472 \cdot 10^7$.
c) $320000 \cdot 400 = 32 \cdot 10000 \cdot 4 \cdot 100 = (32 \cdot 4) \cdot 10000 \cdot 100 = 128 \cdot 1000000 = 128 \cdot 10^6$.
ç) $4657 = 4 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1 = 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$.
d) $8 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = 8 \cdot 100000 + 6 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 9 \cdot 1 = 800000 + 60000 + 3000 + 500 + 20 + 9 = 863529$.

Të theksojmë se për shumëzimin dhe pjesëtimin e fuqive me baza të njëjta vlejné këto rregulla:

Dy fuqi me baza të njëjta shumëzohen (pjesëtohen) duke përshkruar bazën e tyre dhe duke i mbledhur (zbritur) treguesit e tyre. D.m.th.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ dhe } a^m : a^n = a^{m-n}, (m > n).$$

Kështu, p.sh. $4^5 \cdot 4^3 = 4^{5+3} = 4^8$ kurse $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$.

2.1.4.5. Pjesëtimi.

2.1.4.5.1. Pjesëtimi pa mbetje.

! SHEMBULLI 27.

Një klasë i ka 32 nxënës. Duam t'i radhitim nxënësit në 4 rreshta, ashtu që secili rresht të ketë numër të njëjtë nxënësish. Nga sa nxënës do t'i ketë secili rresht? Përgjigja në këtë pyetje do të jetë: Secili rresht do të ketë aq nxënës sa herë 4 bëjnë 32. Meqë 8 herë 4 bëjnë 32, $(8 \cdot 4 = 32)$, përfundojmë që çdo rresht do t'i ketë nga 8 nxënës. Këtë fakt e shënojmë kështu: $32 : 4 = 8$ dhe e lexojmë 32 pjesëtim për 4 bëjnë 8.

Duke pasur parasysh shembullin e mësipërm përfundojmë: Le të jenë a dhe b dy numra natyrorë dhe $a > b$. Të pjesëtosh (pa mbetje) numrin a me numrin b d.m.th. të gesh një numër të tretë q të tillë që prodhimi i numrit b me numrin q të jetë i barabartë me numrin a ; në këtë rast shkruajmë $a : b = q$. Pra:

$$a : b = q \text{ atëherë dhe vetëm atëherë kur } a = b \cdot q \text{ atëherë dhe vetëm atëherë kur } b = a : q.$$

: quhet *veprimi i pjesëtimit*; a quhet ***i pjesëtueshmi***, b quhet ***pjesëtuesi*** kurse q quhet ***herësi*** i numrave a dhe b . Po ashtu, thuhet që a ***plotpjesëtohet*** me b ose, që numri b është ***pjesëtues i*** numrit a ose, që a është ***shumëfish*** (më saktësisht ***q-fish***) i numrit b ose, që b ***përmbahet*** (***shkon***) ***q herë në a*** si dhe q ***përmbahet*** (***shkon***) ***b herë në a***. Për herësin $a : b$ themi edhe se është ***b herë më i vogël se*** numri a .

Duke pasur parasysh këto emërtime, vetia e mësipërme shprehet edhe kështu:

$$\begin{aligned} (I \text{ pjesëtueshmi}) : (\text{pjesëtuesi}) &= (\text{herësi}) && \text{atëherë dhe vetëm atëherë kur} \\ (I \text{ pjesëtueshmi}) &= (\text{pjesëtuesi}) \cdot (\text{herësi}) && \text{atëherë dhe vetëm atëherë kur} \\ (\text{pjesëtuesi}) &= (I \text{ pjesëtueshmi}) : (\text{herësi}) \end{aligned}$$

d.m.th.

$$(a : b) \cdot b = b \cdot (a : b) = a \text{ dhe } a : (a : b) = b$$

Vetia e mëposhtme tregon që pjesëtimi është veprim me anën e të cilit gjejmë njërin nga të dy faktorët kur e dimë prodhimin dhe faktorin tjetër. Pra:

$$(\text{faktori i parë}) \cdot (\text{faktori i dytë}) = \text{prodhimi} \quad \text{atëherë dhe vetëm atëherë kur}$$

$$\text{njëri faktori} = (\text{prodhimi}) : (\text{faktori tjetër})$$

Kjo d.m.th.se pjesëtimi dhe shumëzimi janë veprime të kundërta.

SHENBULLI 28.

a) $12 : 3 = 4$ dhe $12 : 4 = 3$ sepse $3 \cdot 4 = 12$. Kështu, 12 plotpjesëtohet me numrat 3 dhe 4, ose, 3 dhe 4 janë pjesëtues të numrit 12 ose, 12 është 3 fishi i numrit 4, ose 12 është 4 fishi i numrit 3; ose 3 përmbahet 4 herë në 12; 4 përmbahet 3 herë në 12. Po ashtu, numri $12 : 3 = 4$ është 3 herë më i vogël se 12 kurse $12 : 4 = 3$ është 4 herë më i vogël se 12.

b) $15 : 5 = 3$ dhe $15 : 3 = 5$, sepse $3 \cdot 5 = 15$. Prandaj, 15 plotpjesëtohet me numrat 3 dhe 5, ose, 3 dhe 5 janë pjesëtues të numrit 15, ose 15 është 3 fishi i numrit 5, ose, 3 është 5 fishi i numrit 3; po ashtu, themi që 3 përmbahet 5 herë në 15 ose që 5 përmbahet 3 herë në 15. Po ashtu, $15 : 5 (= 3)$ është 5 herë më i vogël se 15 dhe $15 : 3 (= 5)$ është 3 herë më i vogël se numri 15.

(Nga shembujt a) dhe b) shihet që, *gjatë pjesëtimit, pjesëtuesi dhe herësi mund t'i ndërrojnë vendet*).

c) 13 nuk plotpjesëtohet me asnjë numër të ndryshëm nga 1 dhe 13, sepse nuk ekziston asnjë çift numrash natyrorë (të ndryshëm nga 1 dhe 13) prodhimi i të cilëve është 13. (Numrat e tillë, që nuk plotpjesëtohen me asnjë numër të ndryshëm nga 1 dhe vetvetja quhen **numra të thjeshtë**. P.sh. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, .. janë disa numra të thjeshtë. Gjeni edhe disa numra të tjerë të thjeshtë !)

ç) Cili numër është 3 herë më i vogël se 18 ? (Ose: Cili numër fitohet me zvogëlimin 3 herë të numrit 18 ?) (Përgjigja: $18 : 3 = 6$); Cili numër është 5 herë më i vogël se numri x ? (Ose: Cili numër fitohet me zvogëlimin 5 herë të numrit x ?) (Përgjigja: $x : 5$); Cili numër është y herë më i vogël se numri x ? (Përgjigja: $x : y$).

SHENBULLI 29.

a) Meqë për çdo numër natyror a vlen $a \cdot 1 = a$, përfundojmë që $a : 1 = a$ dhe $a : a = 1$. Pra, **herësi i pjesëtimit të çdo numri me numrin 1 është vetë ai numër**; dhe, **herësi i pjesëtimit të çdo numri me vetveten është numri 1**. Me fjalë të tjera, çdo numër plotpjesëtohet me numrin 1 dhe me vetveten. Kështu, p.sh. $7 : 1 = 7$ dhe $7 : 7 = 1$; $12 : 1 = 12$ dhe $12 : 12 = 1$, etj.

b) Meqë për çdo numër natyror a vlen $0 \cdot a = 0$, përfundojmë që $0 : a = 0$, d.m.th. **herësi i pjesëtimit të numrit 0 me çdo numër natyror (të ndryshëm nga 0) është i barabartë me 0**. Kështu, p.sh. $0 : 4 = 0$; $0 : 19 = 0$, $0 : 125 = 0$, etj.

c) Meqë për çdo numër $a \neq 0$, nuk ekziston asnjë numër q i tillë që $0 \cdot q = a$, përfundojmë që **herësi $a : 0$ i pjesëtimit të çdo numri të ndryshëm nga 0 me numrin 0 nuk ekziston**. Kështu, herësat $5 : 0$, $12 : 0$, $115 : 0$ nuk ekzistojnë. Them, po ashtu, që **pjesëtimi me 0 nuk ka kuptim** ose që **me 0 nuk mund të pjesëtohet**.

ç) Meqë për çdo numër a vlen $0 \cdot a = 0$, përfundojmë që $0 : 0 = a$ për çdo numër a . D.m.th. **në qoftë se i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi janë 0 atëherë herësi është i pacaktuar (d.m.th. i çfarëdoshëm)**. Kështu, p.sh. $0 : 0 = 5$ sepse $0 \cdot 5 = 0$; por edhe $0 : 0 = 7$ sepse $0 \cdot 7 = 0$, ose $0 : 0 = 10$, sepse $0 \cdot 10 = 0$.

2.1.4.5.2. Pjesëtimi me mbetje.

Në qoftë se 16 mollë duhet t'u dahan 3 vetëve, atë herë secili nga ta do të marrë nga 5 mollë dhe do të teprojë një mollë, sepse $16 = 5 \cdot 3 + 1$. Prandaj themi që gjatë pjesëtimit të numrit 16 me numrin 3 fitohet herësi 5 dhe mbetet (tepron) 1.

Në rastin e përgjithshëm, le të jenë a dhe b dy numra natyrorë të tillë që $a > b$. Të pjesëtosh (me mbetje) numrin a me numrin b d.m.th. të gjesht dy numra q dhe r të tillë që $0 \leq r < b$ dhe $a = b \cdot q + r$ d.m.th. $a - b \cdot q = r$. Në këtë rast do të shkruajmë $a : b = q$ dhe mbetet r .

Numri a quhet **i pjesëtueshmi**, b quhet **pjesëtuesi**, q quhet **herësi (i përafërt)** kurse r quhet **mbetja** e pjesëtimit të numrit a me numrin b . Kështu, kemi:

$$i \text{ pjesëtueshmi} = (\text{pjesëtuesi}) \cdot (\text{herësi}) + (\text{mbetja}), \text{ ose, } \text{mbetja} = (i \text{ pjesëtueshmi}) - (\text{pjesëtuesi}) \cdot (\text{herësi})$$

! SHEMBULLI 30.

a) $38 : 7 = 5$ dhe mbetet 3 sepse $38 = 7 \cdot 5 + 3$; 38 është i pjesëtueshmi, 7 është pjesëtuesi, 5 është herësi (i përafërt) dhe 3 është mbetja e pjesëtimit të numrit 38 me numrin 7. Vëreni që edhe $38 = 5 \cdot 7 + 3$ që d.m.th. se $38 : 5 = 7$ dhe mbetet 3. Pra, **gjatë pjesëtimit (me mbetje), nëse pjesëtuesi me herësin i ndërrojnë vendet mbetja mbetet e pandryshuar**. Po ashtu, vëreni që **mbetja është më e vogël se pjesëtuesi**.

b) Në qoftë se i pjesëtueshmi është 56 dhe pjesëtuesi 6 të gjendet herësi dhe mbetja.

Përgjigja: Meqë $56 : 6 = 9$ dhe mbetet 2 (sepse $56 = 6 \cdot 9 + 2$) përfundojmë që 9 është herësi kurse 2 mbetja e pjesëtimit të numrit 56 me numrin 6.

c) Në qoftë se pjesëtuesi është 3, herësi 7 dhe mbetja 4, të gjendet i pjesëtueshmi.

Përgjigja: $i \text{ pjesëtueshmi} = (\text{pjesëtuesi}) \cdot (\text{herësi}) + (\text{mbetja}) = 3 \cdot 7 + 4 = 21 + 4 = 25$. Pra, i pjesëtueshmi është 25.

ç) Në qoftë se i pjesëtueshmi është 125, pjesëtuesi 23 dhe herësi 5, sa është mbetja?

Përgjigja: $\text{mbetja} = (i \text{ pjesëtueshmi}) - (\text{pjesëtuesi}) \cdot (\text{herësi}) = 125 - 23 \cdot 5 = 125 - 115 = 10$; pra mbetja është 10.

d) Mbetja e një pjesëtimit është 12. Cila është vlera më e vogël që mund të ketë pjesëtuesi ?

(Përgjigja: Meqë mbetja është më e vogël se pjesëtuesi, vlera më e vogël e pjesëtuesit është 13).

2.1.4.5.3 Vetë të pjesëtimit.

! SHEMBULLI 31.

I kemi dy shporta me mollë, njëra i ka 15 mollë dhe tjetra 20. Këto mollë duhet t'u ndajmë 5 fëmijëve, ashtu që secili prej tyre të marrë numër të njëjtë të mollave. Si mund ta bëjmë ndarjen e mollëve? Nga sa mollë i takojnë secilit prej fëmijëve ?

! ZGJIDHJE

Mënyra e parë: I bashkojmë mollët e të dy shportave dhe pastaj iu ndajmë ato 5 fëmijëve. Kështu, kemi:
 $(15 + 20) : 5 = 35 : 5 = 7$.

Pra, secili nga fëmijët do t'i ketë 7 mollë.

Mënyra e dytë: Njëherë i ndajmë mollët e shportës së parë, e pastaj të dytës. Kështu do të kemi: $15 : 5 = 3$ dhe $20 : 5 = 4$. Pra, secilit fëmijë nga shporta e parë do t'i takojnë nga 3 mollë, kurse nga shporta e dytë nga 4 mollë; pas ndarjes së mollëve nga të dy shportat secili prej fëmijëve do të marrë nga
 $15 : 3 + 20 : 4 = 5 + 4 = 7$

mollë.

Duke krahasuar rezultatet e fituara gjatë dy mënyrave të ndarjes së mollëve, vërejmë që vlen barazimi:
 $(15 + 20) : 5 = 15 : 5 + 20 : 5$

Edhe në rastin e përgjithshëm vlejnë këto dy veti:

1. **Shuma e dy (ose më shumë) numrave pjesëtohet me një numër nëse secili nga mbledhorët pjesëtohet me atë numër,** dhe
2. **Ndryshimi i dy numrave pjesëtohet me një numër nëse si i zbritëshmi ashtu edhe zbritësi pjesëtohen me atë numër,**

të cilat i shprehim edhe kështu :

$$\begin{aligned} 1. (a + b) : c &= a : c + b : c; \\ 2. (a - b) : c &= a : c - b : c \end{aligned}$$

Janë këto vetitë e shpërndarjes (distributive) të mbledhjes (zbritjes) ndaj pjesëtimit.

Këto veti na mundësojnë që të kryejmë më lehtë (përmendësh) pjesëtime të ndryshme. E ilustruam këto me shembujt vijues.

! SHEMBULLI 32.

a) 1. $65 : 5 = (50 + 15) : 5 =$
 $= 50 : 5 + 15 : 5$ (sipas vetisë shpërndarëse)
 $= 10 + 3 = 13$; (Prova: $13 \cdot 5 = 65$).

Më sipër shfrytëzuam faktin që $50 : 5 = 10$ DH $15 : 5 = 3$.

b) 1. $156 : 4 = (100 + 40 + 16) : 4 =$
 $= 100 : 4 + 40 : 4 + 16 : 4$ (sipas vetisë së shpërndarjes)
 $= 25 + 10 + 4 = 39$. (Prova: $4 \cdot 39 = 156$).

2. $156 : 4 = (120 + 36) : 4 = 120 : 4 + 36 : 4$ (sipas vetisë shpërndarëse)
 $= 30 + 9 = 39$.

3. $156 : 4 = (160 - 4) : 4 = 160 : 4 - 4 : 4$ (sipas vetisë shpërndarëse)
 $= 40 - 1 = 39$.

Vërejmë që mënyrat 2 dhe 3 të llogaritjes janë më të lehta se mënyra 1. Në dy mënyrat 2 dhe 3 i kryem edhe këto pjesëtime:

$120 : 4 = 30$ DH $36 : 4 = 9$ dhe $160 : 4 = 40$ DH $4 : 4 = 1$.

c) $1008 : 7 = (700 + 280 + 28) : 7 =$
 $= 700 : 7 + 280 : 7 + 28 : 7$ (sipas vetisë shpërndarëse)
 $= 100 + 40 + 4 = 144$ (Prova: $144 \cdot 7 = 1008$);

Më sipër i kryem edhe këto pjesëtime:

$700 : 7 = 100$ DH $280 : 7 = 40$ DH $28 : 7 = 4$.

ç) $677 : 8 = (640 + 37) : 8 =$
 $= 640 : 8 + 37 : 8$ (sipas vetisë shpërndarëse)
 $= 80 + (4 dhe mbeten 5) = (80 + 4) dhe mbeten 5$
 $= 84 dhe mbeten 5$. (Prova: $84 \cdot 8 + 5 = 672 + 5 = 677$).

d) $6248 : 6 = (6000 + 240 + 8) : 6$
 $= 6000 : 6 + 240 : 6 + 8 : 6$ (sipas vetisë shpërndarëse)
 $= 1000 + 40 + (1 \text{ dhe mbeten } 2)$
 $= (1000 + 40 + 1) \text{ dhe mbeten } 2 = 1041 \text{ dhe mbeten } 2;$
 (Prova: $1041 \cdot 6 + 2 = 6246 + 2 = 6248$).

! SHEMBULLI 33.

- a) $70 : 10 = 7$ sepse 70 i ka 7 dhjetëshe;
- b) $86 : 10 = 8$ dhe mbeten (teprojnë) 6, sepse 86 i ka 8 dhjetëshe dhe teprojnë 6;
- c) $400 : 10 = 40$ sepse 400 i ka 40 dhjetëshe;
- d) $567 : 10 = 56$ dhe teprojnë 7, sepse 567 i ka 56 dhjetëshe dhe teprojnë 7 ;
- e) $600 : 100 = 6$, sepse 600 i ka 6 qindëshe;
- f) $745 : 100 = 7$ dhe teprojnë 45, sepse 745 i ka 7 qindëshe dhe teprojnë 45;
- g) $8000 : 1000 = 8$, sepse 8000 i ka 8 mijëshe;
- h) $9874 : 1000 = 9$ dhe teprojnë 874, sepse 9874 i ka 9 mijëshe dhe teprojnë 874

Nga shembulli i mësipërm rrjedh kjo rregull e pjesëtimit me njësi dhjetore:

Të pjesëtosh një numër me 10, 100, 1000,..., d.m.th. të gjesh sa dhjetëshe, qindëshe, mijëshe, ..., përkatësisht, ka në atë numër.

! SHEMBULLI 34.

a) Meqë $8 : 4 = 2$ vërejmë që edhe:

$$(8 \cdot 3) : (4 \cdot 3) = 24 : 12 = 2; \quad (8 \cdot 4) : (4 \cdot 4) = 32 : 16 = 2;$$

$$(8 \cdot 5) : (4 \cdot 5) = 40 : 20 = 2; \quad (8 \cdot 9) : (4 \cdot 9) = 72 : 36 = 2; \text{ etj}$$

b) Meqë $36 : 12 = 3$ vërejmë që edhe:

$$(36 : 2) : (12 : 2) = 18 : 6 = 3; \quad (36 : 3) : (12 : 3) = 12 : 4 = 3;$$

$$(36 : 4) : (12 : 4) = 9 : 3 = 3; \quad (36 : 6) : (12 : 6) = 6 : 2 = 3.$$

Nga ky shembull vërejmë që vlen kjo veti:

Herësi nuk ndryshon nëse i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi shumëzohen ose pjesëtohen me numër të njëjtë të ndryshëm nga 0 (d.m.th. herësi nuk ndryshon nëse i pjesëtueshmi rritet (zvogëlohet) aq herë sa rritet (zvogëlohet) pjesëtuesi). Pra, nëse $a : b = q$ atëherë edhe

$$(a \cdot c) : (b \cdot c) = q \text{ dhe } (a : c) : (b : c) = q.$$

Nëse pjesëtuesi është numër dyshifrorë, treshifrorë, ..., kjo veti na mundëson që:

a) me anë të shumëzimit ai të shndërrohet në njësi dhjetore; ose b) me anë të pjesëtimit të ulet rendi i tij. E ilustrujmë këtë në shembullin vijues.

! SHEMBULLI 35.

- a) $150 : 25 = (150 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = 600 : 100 = 6$; ose
 $150 : 25 = (150 : 5) : (25 : 5) = 30 : 5 = 6$.
- b) $2500 : 125 = (2500 \cdot 8) : (125 \cdot 8) = 20000 : 1000 = 20$; ose
 $2500 : 125 = (2500 : 25) : (125 : 25) = 100 : 5 = 20$.
- c) $2245 : 25 = (2245 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = 8980 : 100 = 89$ dhe teprojnë 80;

! SHEMBULLI 36.

- a) $(2 \cdot 48) : 6 = 96 : 6 = 16 = 2 \cdot 8$; b) $48 : (6 : 2) = 48 : 3 = 16 = 2 \cdot 8$;
 $(3 \cdot 48) : 6 = 144 : 6 = 24 = 3 \cdot 8$; $48 : (6 : 3) = 48 : 2 = 24 = 3 \cdot 8$.

Nga ky shembull përfundojmë që vlejnjë këto dy veti:

Herësi shumëzohet me një numër në qoftë se i pjesëtueshmi shumëzohet me atë numër, (ose: herësi rritet aq herë sa herë rritet i pjesëtueshmi) d.m.th. në qoftë se

$$a : b = q, \quad \text{atëherë} \quad (c \cdot a) : b = c \cdot q = c \cdot (a : b)$$

Herësi shumëzohet me një numër në qoftë se pjesëtuesi pjesëtohet me atë numër, (ose: herësi rritet aq herë sa herë zvogëlohet pjesëtuesi) d.m.th. në qoftë se

$$a : b = q, \quad \text{atëherë} \quad a : (b : c) = q \cdot c = (a : b) \cdot c.$$

! SHEMBULLI 37.

(Për ata që duan të dinë më shumë). Arbeni dhe Arlinda, në ditën e parë të javës, saktësisht në mesditë, u nisën për në SHBA. Fluturimi nga Prishtina deri në New York zgjati 928 minuta. Ata qëndruan atje saktësisht 2890 minuta, kurse fluturimi gjatë kthimit ishte për 28 minuta më i shkurtër se ai gjatë shkuarjes. Cilën ditë të javës dhe në ora sa të asaj dite u kthyen ata në vendlindje?

! ZGJIDHJE

Arbeni dhe Arlinda janë kthyer në vendlindje pas

$$928 + 2890 + (928 - 28) = 3818 + 900 = 4718 \text{ minutash.}$$

Meqë 1 ditë = 24 orë dhe 1 orë = 60 minuta, përfundojmë se 1 ditë = $24 \cdot 60 = 1440$ minuta. Meqë:

$$\begin{array}{r} 4718 : 1440 = 3 \text{ ditë} \\ - \underline{4320} \\ 398 \text{ minuta} \end{array}$$

përfundojmë që Arbeni dhe Arlinda janë kthyer në vendlindje pas 3 ditëve e 398 minutave. 398 minuta i kthejmë në orë. Meqë 1 orë = 60 minuta, përfundojmë që

$$\begin{array}{r} 398 : 60 = 6 \text{ orë} \\ - \underline{360} \\ 38 \text{ minuta.} \end{array}$$

Kështu, Arbeni dhe Arlinda janë kthyer në vendlindje pas 3 ditëve e 6 orëve e 38 minutave. Meqë ata janë nisur ditën e hënë (ditën e parë të javës) në ora 12 (saktësisht në mesditë) dhe meqë ata janë kthyer pas 3 ditëve e 6 orëve e 38 minutave, përfundojmë që në vendlindje janë kthyer ditën e enjte në orën 18 (= 12 + 6) e 38 minuta.

2.1.4.6. Shumëfishi më i vogël i përbashkët dhe pjesëtuesi më i madh i përbashkët

Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy (ose më shumë) numrave a, b është numri më i vogël c që plotpjesëtohet me a dhe me b; shënojmë $shmvp(a, b) = c$

Si gjendet shumëfishi më i vogël i përbashkët? Përgjigjen në këtë pyetje e sqarojmë në shembullin vijues. Që të gjejmë p.sh. shumëfishin më të vogël të përbashkët të numrave 42, 120, 180, së pari këta numra i shkruajmë si prodhime të faktorëve të thjeshtë të tyre (ose, siç thuhet ndryshe, i zbërthejmë në faktorë të thjeshtë):

$$\begin{aligned}42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \\120 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\180 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\end{aligned}$$

Shmvp, që e kërkojmë, duhet të plotpjesëtohet me numrin 42, prandaj ai duhet t'i përmbaj të gjithë faktorët e thjeshtë të 42-shit; i marrim këta faktorë:

$$2 \cdot 3 \cdot 7$$

Meqë *shmvp* duhet të plotpjesëtohet edhe me 120, ai duhet t'i përmbaj edhe të gjithë faktorët e thjeshtë të 120-tës. Meqë prodhimi i mësipërm $2 \cdot 3 \cdot 7$ i përmban disa faktorë të 120-tës, atij prodhimi i shtojmë edhe faktorët $2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$ e 120-tës që mungojnë dhe, fitojmë prodhimin

$$(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Në fund, meqë *shmvp* duhet të plotpjesëtohet edhe me 180, ai i përmban edhe të gjithë faktorët e 180-tës. Por, prodhimi i fundit $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ i përmban disa faktorë të 180. Andaj, këtij prodhimi i shtojmë faktorin 3 të 180-tës që i mungon dhe, përfundimisht, fitojmë:

$$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Kështu, $shmvp(42, 120, 180) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

Vërejmë që prodhimi $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ i përmban faktorët e përbashkët 2, 3, 5 dhe faktorin jo të përbashkët 7, në treguesin (eksponentin) më të madh.

Më shkurt dhe më shpejtë vijmë te i njëjti rezultat edhe kështu.

Numrat e dhënë i shkruajmë njërin pranë tjetrit dhe të gjithë, njëkohësisht, i zbërthejmë në faktorë të thjeshtë duke vepruar si në vijim.

42	120	180	2
21	60	90	2
21	30	45	2
21	15	45	3
7	5	15	3
7	5	5	5
7	1	1	7
1	1	1	

Meqë numrat 42, 120, 180 plotpjesëtohen me 2, numrin 2 e shkruajmë në anën e djathtë të vijës vertikale dhe numrat e dhënë i pjesëtojmë me 2. Herësat e fituar 21, 60, 90 i shkruajmë nën numrat përkatës. Herësat e fituar 60 dhe 90 plotpjesëtohen me 2 kurse 21 nuk plotpjesëtohet me 2. E shkruajmë 2 djathtas vijës dhe nën 60 dhe 90 shkruajmë herësat 30 dhe 45, kurse nën 21 e rishkruajmë 21. Tash, 21 dhe 45 nuk plotpjesëtohen me 2 por 30 plotpjesëtohet me 2. Prandaj djathtas vijës shkruajmë 2 kurse nën 21 dhe 45 i

rishkruajmë ata numra dhe nën 30 shkruajmë herësin 15 (të pjesëtimit të 30 me 2). Që të tre numrat 21, 15 dhe 45 plotpjestohen me 3. Shkruajmë 3 djathtas vijës kurse nën 21, 15 dhe 45 shkruajmë herësat 7, 5, 15 të pjesëtimit të tyre me 3. Meqë 15 plotpjestohet me 3 kurse 5 dhe 7 nuk plotpjestohen me 3, djathtas vijës shkruajmë 3. Nën 7 dhe 5 i rishkruajmë ata numra kurse nën 15 shkruajmë herësin 5 (të pjesëtimit të 15 me 3). Meqë numri 7 nuk plotpjestohet me 5 kurse 5 dhe 5 plotpjestohen me 5, djathtas vijës shënojmë 5. Tash, nën 7 e rishkruajmë numrin 7 kurse në 5 dhe 5 shkruajmë 1 dhe 1 (që janë herësat e 5 dhe 5 të pjesëtuar me 5). Në fund, meqë 7 plotpjestohet me 7, djathtas vijës shkruajmë 7, përfundi 7 shënojmë 1 (që është herësi i pjesëtimit të 7 me 7) kurse përfundi 1 dhe 1 i rishkruajmë këta numra. Me këtë përfundon veprimi i zbërthimit të numrave të dhënë në faktorë të thjeshtë.

Tash, *shmvp* (42, 120, 180) është i barabartë me prodhimin e të gjithë faktorëve të thjeshtë që ndodhen djathtas vijës vertikale, d.m.th.

$$\text{shmvp} (42, 120, 180) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

! SHEMBULLI 38.

Të gjendet *shmvp* i numrave a) 6, 8 dhe 22 ; b) 42, 210 dhe 135.

! ZGJIDHJE

Sipas procedurës së përshkruar më sipër, kemi:

a)	6	8	22	2
	3	4	11	2
	3	2	11	2
	3	1	11	3
	1	1	11	11
	1	1	1	

Prandaj,

$$\text{shmvp} (6, 8, 22) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 264$$

b)	42	210	135	2
	21	105	135	3
	7	35	45	3
	7	35	15	3
	7	35	5	5
	7	7	1	7
	1	1	1	

Kështu,

$$\text{shmvp} (42, 210, 135) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1890$$

Para se të tregojmë rregullat vijuese të gjetjes së *shmvp* rikujtojmë që dy ose më shumë **numra** quhen **të thjeshtë ndërmjet veti** ose **relativisht të thjeshtë** në qoftë se ata nuk kanë faktorë të përbashkët. P.sh. 4 dhe 23 ose 3, 5 dhe 13, ose 8, 5, 11, 17 janë numra të thjeshtë ndërmjet veti.

Raste të thjeshta të caktimit të *shmvp* janë këto:

1. Në qoftë se dy ose më shumë numrat janë relativisht të thjeshtë, atëherë *shmvp* i tyre është i barabartë me prodhimin e tyre. P. sh.

$$\text{shmvp} (3, 5, 11) = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 121 ; \quad \text{shmvp} (8, 9, 35) = 8 \cdot 9 \cdot 35 = 2520$$

2. Në qoftë se njëri nga numrat është shumëfish i (plotpjestohet me) numrave të tjerë, atëherë *shmvp* e atyre numrave është i barabartë me atë numër. P.sh.

$shmvp(3, 4, 6, 8, 24) = 24$ sepse 24 është shumëfish i (plotpjesëtohet me) 3, 4, 6 dhe 8; ngjashëm, $shmvp(12, 36) = 36$; $shmvp(3, 21) = 21$

3. Në qoftë se një (ose më shumë) nga numrat e dhënë janë faktorë të një numri tjetër të dhënë, atëherë gjatë gjetjes së $shmvp$ të atyre numrave ai (ata) numra nuk meren parasysh. P.sh.

$shmvp(4, 6, 8, 12) = shmvp(8, 12) = 48$ sepse 4 dhe 6 janë faktorë të 12. Ngjashëm, $shmvp(14, 16, 32, 56) = shmvp(32, 56)$ sepse 14 është faktor i 56 dhe 16 është faktor i 32

! SHEMBULLI 39 (PËR ATA QË DUAN TË DINË MË SHUMË).

a) Dy autobusa, që udhëtojnë në linja të gjata në dy rrugë të ndryshme, nisen nga qyteti në të njëjtë ditë. Autobusi i parë kthehet pas çdo 8 ditëve kurse autobusi i dytë kthehet pas çdo 10 ditëve. Pas sa ditësh këta dy autobusa do të nisen të njëjtën ditë nga qyteti ?

b) Gjatë njërës anë të rrugës janë mbjellë pemë, kurse gjatë anës tjetër janë vendosur shtyllat e rrymës elektrike. Largesia ndërmjet çdo dy pemëve është 15 m, kurse largesia ndërmjet çdo dy shtyllave është 24 m. Në qoftë se pema P dhe shtylla Sh qëndrojnë përballë njëra tjetrës, pas sa metrash do të qëndrojnë përsëri pema P_1 dhe shtylla Sh_1 përballë njëra tjetrës ?

! ZGJIDHJE

- Që autobusi i parë të kthehet përsëri në qytet duhet të kalojnë 8 ditë, ose 16 ditë, ose... një shumëfish i 8 ditëve.
- Që autobusi i dytë të kthehet përsëri në qytet duhet të kalojnë 10 ditë, ose 20 ditë, ose... një shumëfish i 10 ditëve.
- Që të dy autobusët të nisen përsëri në të njëjtën ditë, duhet të kalojnë aq ditë sa është shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave 8 dhe 10.
- Meqë $shmvp(8, 10) = 40$, përfundojmë që pas 40 ditësh të dy autobusat do të nisen përsëri nga qyteti në të njëjtën ditë.
- Duke arsyetuar njësoj si në shembullin nën **a)** përfundojmë që pas $shmvp(15, 24) = 120$ m pema P_1 dhe shtylla Sh_1 do të qëndrojnë përsëri përballë njëra tjetrës.

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy (ose më shumë) numrave a , b është numri më i madh c me të cilin plotpjesëtohen numrat a dhe b ; shënojmë $pmmp(a, b) = c$.

Që të gjejmë pjesëtuesin më të madh të përbashkët të dy ose më shumë numrave, së pari gjejmë të gjithë pjesëtuesit (faktorët) e atyre numrave, së dyti i ndajmë pjesëtuesit e përbashkët të tyre dhe, në fund marrim më të madhin nga ta.

Të gjejmë p.sh. $pmmp(36, 48, 60)$.

Të gjithë pjesëtuesit (faktorët) e numrit 36 janë: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 dhe 36; të gjithë pjesëtuesit e numrit 48 janë: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; të gjithë pjesëtuesit e numrit 60 janë: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60; pjesëtuesit e përbashkët të tre numrave të dhënë janë: 1, 2, 3, 4, 6, 12; më i madhi nga këta është 12. Prandaj, $pmmp(36, 48, 60) = 12$.

$Pmmp$ e caktojmë më shpejtë, po qe se numrat e dhënë i zbërthejmë, njëkohësisht, në faktorë të thjeshtë; pranë faktorëve të përbashkët vejmë shkronjën (p) dhe marrim prodhimin e faktorëve të tillë.

Kështu, për të gjetur $pmmp(36, 48, 60)$ zbërthejmë numrat e dhënë në faktorë të thjeshtë dhe pranë faktorëve të përbashkët vejmë shkronjën (p). Marrim prodhimin e faktorëve të shënuar me shkronjën (p) dhe

36	48	60	2 (p)
18	24	30	2 (p)
9	12	15	2
9	6	15	2
9	3	15	3 (p)
3	1	5	3
1	1	5	5

gjejmë që:

$$pmmp(36, 48, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

SHENBULLI 40.

Të gjendet $pmmp(480, 630, 2205)$;

ZGJIDHJE

Numrat 480, 630 dhe 2205 i zbërthejmë njëkohësisht në faktorë të thjeshtë dhe pranë faktorëve të përbashkët për të tre ata numra vejmë shenjë (p). Në fund marrim prodhimin e faktorëve të shënuar me shkronjën (p) dhe gjejmë që:

480	630	2205	2
240	315	2205	2
120	315	2205	2
60	315	2205	2
30	315	2205	2
15	315	2205	3 (p)
5	105	735	3
5	35	245	5 (p)
1	7	49	7
1	1	7	7
1	1	1	

$$pmmp(480, 630, 2205) = 3 \cdot 5 = 15.$$

2.1.4.7. Shprehjet numerike. Radha e kryerjes së veprimeve.

Shprehje numerike quajmë një bashkësi numrash të lidhur në mes veti me shenjat e veprimeve themelore arithmetike (të mbledhjes (+), zbritjes (-), shumëzimit ($\cdot$), pjesëtimit ($:$) dhe fuqizimit) dhe, eventualisht të ndarë me kllapa të ndryshme (të vogla (), të mesme [], gjarpërore { }).

Shprehjet numerike që përmbajnë vetëm një shenjë veprimi quhen **shprehje numerike të thjeshta**, ndërsa ato që përmbajnë më shumë se një shenjë veprimi quhen **shprehje numerike të përbëra**.

SHENBULLI 41.

a) $3 + 5$; b) $4 \cdot 6$; c) 4^2 ; d) $6 \cdot 4 - 5$; e) $16 : 4 \cdot 2 + 5 + 3^2$;

dh) $24 : (4 + 2) - 3$; e) $125 - [3 \cdot (5 - 2) : (2 + 1)] \cdot 5$; f) $3 \cdot \{26 - [32 : (5 + 3) + 1] - 7\}$ janë shembuj shprehjesh numerike. Shprehjet nën a), b), c) janë të thjeshta kurse të tjerat janë të përbëra.

Dy shprehje numerike të lidhura me shenjë e barazisë (=) formojnë një **barazim numerik**, ndërkohë dy shprehje numerike të lidhura me njërin nga shenjat <, >, ose $\geq$ formojnë një **jobarazim numerik**.

$5 + 6 \cdot 3 = 20 + 3$; $3 \cdot (25 - 12 : 2) = 47 + 5 \cdot 2$ janë shembuj barazimesh numerike;

$8 \cdot 4 < 59 - 7$; $44 : [8 : (6 - 4)] \leq 10 + 1$ janë shembuj jobarazimesh numerike.

2.1.4.7.1. Vlera e shprehjes numerike. Radha e kryerjes së veprimeve

Çdo shprehje numerike është e barabartë me një numër i cili quhet **vlerë e asaj shprehjeje numerike**. Kështu p.sh. shprehjet numerike $5 + 6$, $7 + 4$, $15 - 4$ e kanë vlerën 11 sepse $5 + 6 = 11$, $7 + 4 = 11$, $15 - 4 = 11$. Po ashtu shprehjet $4 \cdot 2$, $16 : 2$, $5 + 3$ e kanë vlerën 8 sepse $4 \cdot 2 = 8$, $16 : 2 = 8$, $5 + 3 = 8$.

Në pyetjen se sa është vlera e shprehjes numerike $16 : 4 \cdot 2 + 5$ Albana, pasi llogariti kështu:

$$16 : 4 \cdot 2 + 5 = 4 \cdot 2 + 5 = 8 + 5 = 13,$$

u përgjigj 13. Ndërkaq, Zana, pasi llogariti kështu:

$$16 : 4 \cdot 2 + 5 = 16 : 8 + 5 = 2 + 5 = 7,$$

u përgjigj 7. Cila e dha përgjigjen e saktë? Për t'u përgjigjur drejtë në këtë pyetje duhet të dimë që veprimet arithmetike kryhen sipas kësaj radhe:

1. **Së pari kryhen veprimet brenda kllapave (dhe ato, së pari brenda kllapave të vogla (.), pastaj brenda kllapave të mesme [,] dhe, në fund, brenda kllapave gjarpërore {,})**;
2. **Së dyti kryhen veprimet e fuqizimit;**
3. **Së treti kryhen veprimet e shumëzimit dhe pjesëtimit me radhë prej të majtës në të djathtë;**
4. **Së katërti kryhen veprimet e mbledhjes dhe zbritjes me radhë prej të majtës në të djathtë.**

Duke pasur parasysh radhën e kryerjes së veprimeve të përshkruar më sipër përfundojmë se Albana ka vepruar drejtë dhe ajo e ka përgjigjen e saktë.

❗ SHEMBULLI 42.

Duke kryer veprimet sipas radhës së përshkruar më sipër të llogaritet vlera e shprehjeve numerike vijuese;

- a) $5 + 3 \cdot 4 - 7$; b) $16 : 4 \cdot 2 + 5 + 3^2$; c) $24 : (4 + 2) - 3$; ç) $3 \cdot 2^2 - 8$;
d) $(3 \cdot 2)^2 - 8$; dh) $125 - [3 \cdot (5 - 2) : (2 + 1)] \cdot 5$;
e) $3 \cdot [26 - \{32 : (5 + 3) + 1\} - 7]$.

❗ ZGJIDHJE

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 5 + 3 \cdot 4 - 7 &= 5 + 12 - 5 \\ &= 17 - 5 \\ &= 12 \end{aligned}$$

së pari është kryer shumëzimi
pastaj është kryer mbledhja
në fund, është kryer zbritja

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 16 : 4 \cdot 2 + 5 + 3^2 &= 16 : 4 \cdot 2 + 5 + 9 \\ &= 4 \cdot 2 + 5 + 9 \\ &= 8 + 5 + 9 \\ &= 22; \end{aligned}$$

është kryer fuqizimi
është kryer pjesëtim
është kryer shumëzimi
është kryer mbledhja

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 24 : (4 + 2) - 3 &= 24 : 6 - 3 \\ &= 4 - 3 \\ &= 1; \end{aligned}$$

është kryer mbledhja brenda kllapave
është kryer pjesëtimi
është kryer zbritja

$$\begin{aligned} \text{ç)} \quad 3 \cdot 2^2 - 8 &= 3 \cdot 4 - 8 \\ &= 12 - 8 \\ &= 4; \end{aligned}$$

është kryer fuqizimi
është kryer shumëzimi
është kryer zbritja

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (3 \cdot 2)^2 - 8 &= 6^2 - 8 \\ &= 36 - 8 \\ &= 28; \end{aligned}$$

është kryer shumëzimi brenda
është kryer fuqizimi
është kryer zbritja

dh) $125 - [3 \cdot (5 - 2) : (2 + 1)] \cdot 5 = 125 - [3 \cdot 3 : 3] \cdot 5$ janë kryer veprimet brenda kllapave të vogla ()
 $= 125 - [9 : 3] \cdot 5$ është kryer shumëzimi brenda kllapave të mesme []
 $= 125 - 3 \cdot 5$ është kryer pjesëtimi brenda kllapave të mesme []
 $= 125 - 15$ është kryer shumëzimi
 $= 110;$ është kryer zbritja.

e) $3 \cdot \{26 - [32 : (5 + 3) + 1] - 7\} = 3 \cdot \{26 - [32 : 8 + 1] - 7\}$ është kryer mbledhja brenda kllapave të vogla ()
 $= 3 \cdot \{26 - [4 + 1] - 7\}$ është kryer pjesëtimi brenda kllapave []
 $= 3 \cdot \{26 - 5 - 7\}$ është kryer mbledhja brenda kllapave []
 $= 3 \cdot \{21 - 7\}$ është kryer zbritja brenda kllapave gjarpërore { }
 $= 3 \cdot 14$ është kryer zbritja brenda kllapave gjarpërore { }
 $= 42.$ është kryer shumëzimi

2.1.4.8. Zbatime. Ekuacionet dhe inekuacionet

Ndryshore ose **e panjohur** quhet shkronja që zëvendëson (paraqet) një numër. Barazimet që përmbajnë ndryshore (të panjohura) quhen **ekuacione**, kurse jobarazitë që përmbajnë ndryshore (të panjohura) quhen **inekuacione**.

$4 \cdot x - 5 = 7$, $15 - 2 \cdot y = 5$, $10 : (5 - x) = 5$ janë shembuj ekuacionesh kurse
 $3 \cdot x + 5 < 17$, $25 - 2x > 5$, $3 \cdot x + 2 \leq 11$ janë shembuj inekuacionesh.

Ekuacionet dhe inekuacionet, zakonisht, zbatohen në zgjidhjen e problemeve të ndryshme të dhëna me fjalë. Për t'i zgjidhur problemet e tilla, duhet që së pari pohimet e tyre ti shndërrojmë në ekuacione ose inekuacione e pastaj t'i zgjidhim ato. D.m. th. së pari problemin e dhënë nga gjuha e zakonshme duhet t'a "përkthejmë" në "gjuhën e matematikës".

Gjatë kësaj, shprehja $a + b$ zëvendëson njërin nga këto shprehje me fjalë:

a plus b ; a e rritur për b ; për b më e madhe (më shumë, më tepër) se a ; shuma e a dhe (me) b ; b i është shtuar a ; a së bashku me b ; etj.

Shprehja $a - b$ zëvendëson njërin nga këto shprehje me fjalë: a minus b ; a e zvogëluar për b ; për b më e vogël (më pak) se a ; ndryshimi i a dhe (me) b ; b i është zbritur (hequr) a ; etj.

Shprehja $a \cdot b$ zëvendëson njërin nga këto shprehje foljore: a herë b ; a e rritur b herë; a herë më e madhe se b ; a e shumëzuar me b ; prodhimi i a dhe (me) b ; a -fishi i b , etj.

Shprehja $a : b$ zëvendëson njërin nga këto shprehje me fjalë: a pjesëtim për b ; a është ndarë në b pjesë të barabarta; herësi i a dhe (me) b ; b herë më i vogël se a ; etj.

SHMBOLLI 43.

Shprehjet e mëposhtme me fjalë të "përkthehen" në "gjuhën matematike":

- Për 4 më i madh se shuma e a dhe 3;
- Për 5 më i vogël se prodhimi i 8 me shumën e a dhe b ;
- 7 herë më madh se ndryshimi i x dhe 9;
- 3 herë më vogël se shuma e 10 dhe y ;
- herësi i shumës së 5 dhe a me ndryshimin e x dhe y ;

- dh) x i rritur për ndryshimin e a dhe b ;
 e) shuma e herësit të a me 4 dhe prodhimit të 4 me b e zvogëluar për 6;
 ë) Prodhimit të numriave 7 dhe y ia shoni 4;
 f) Trefishi i ndryshimit të 14 me 5 i rritur për 8. Sa është vlera e kësaj shprehje ?

! ZGJIDHJE

- a) $(a + 3) + 4$; b) $8 \cdot (a + b) - 5$; c) $7 \cdot (x - 9)$; ç) $(10 + y) : 3$;
 d) $(5 + a) : (x - y)$; dh) $x + (a - b)$; e) $[(a : 4) + 4 \cdot b] - 6$. ë) $7 \cdot y + 4$;
 f) $3 \cdot (14 - 5) + 8$. Vlera e kësaj shprehje është: $3 \cdot (14 - 5) + 8 = 3 \cdot 9 + 8 = 27 + 8 = 35$.

2.1.4.8.1. Zgjidhja e ekuacioneve të formave $x + b = c$, $x - b = c$, $a - x = c$.

Zgjidhje të një ekuacioni quajmë numrin (natyror ose 0) i cili kur zëvendësohet në vend të të panjohurës x , e shndërron atë ekuacion në barazim të saktë (vërtetë) numerik. Kështu, p.sh. numri 9 është zgjidhje e ekuacionit $x + 6 = 15$ sepse për $x = 9$ fitojmë barazimin numerik $9 + 6 = 15$ i cili është i saktë. Por, p.sh. numri 7 nuk është zgjidhje e ekuacionit $x + 6 = 15$ sepse për $x = 7$ fitohet barazimi numerik $7 + 6 = 15$ i cili nuk është i saktë.

Të zgjidhësh një ekuacion d.m.th. të gjeshtë gjitha zgjidhjet e tij. Në zgjidhjen e ekuacioneve të formave të mësipërme i shfrytëzojmë vetitë e mbledhjes dhe zbritjes të mësuara më sipër. E ilustruam këtë me anën e shembujve vijues.

! SHEMBULLI 44.

- Të zgjidhen ekuacionet a) $x + 25 = 139$; b) $x - 12 = 9$; c) $37 - x = 18$;
 ç) $328 + x = 2169$; d) $6749 - x = 1356$; dh) $x - 1265 = 47897$.

! ZGJIDHJE

a) Në ekuacionin $x + 25 = 139$, e panjohura x është mbledhori i panjohur, 25 është mbledhori i njohur dhe 139 është shuma e atyre dy mbledhorëve. Prandaj, sipas vetisë 2 kemi:

mbledhori $x = (shuma) - (mbledhori) = 139 - 25 = 114$. Pra, $x = 114$ është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.

Prova: për $x = 114$ ekuacioni $x + 25 = 139$ shndërrohet në barazimin $114 + 25 = 139$ i cili është barazim i saktë numerik.

b) Në ekuacionin $x - 12 = 9$, e panjohura x është i zbritëshmi, 12 është zbritësi dhe 9 është ndryshimi. Kështu, sipas vetisë 1, kemi:

i zbritëshmi $x = (ndryshimi) + (zbritësi) = 9 + 12 = 21$.

Kështu, $x = 21$ është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.

Prova: Për $x = 21$ nga $x - 12 = 9$ merret barazimi numerik $21 - 12 = 9$ që është i vërtetë.

c) Në ekuacionin $37 - x = 18$ e panjohura x është zbritësi, 37 është i zbritëshmi dhe 18 është ndryshimi. Prandaj:

zbritësi $x = (i zbritëshmi) - (ndryshimi) = 37 - 18 = 19$.

D.m.th. $x = 19$ është zgjidhja e ekuacionit të dhënë. (Bëni provën !).

ç) Në ekuacionin $328 + x = 2169$ e panjohura x është një mbledhor, 328 është mbledhori tjetër kurse 2169 është shuma e atyre dy mbledhorëve. Kështu,

$$\text{mbledhori } x = (\text{shuma}) - (\text{mbledhori}) = 2169 - 328 = 1841.$$

Pra, $x = 1841$ është zgjidhja e ekuacionit. (Prova: $328 + 1841 = 2169$ është i saktë).

d) Nga $6749 - x = 1356$, ngjashëm si në rastin c), rrjedh që:

$$x = 6749 - 1356 = 5393. \quad (\text{Bëni provën !})$$

dh) Nga $x - 1265 = 47897$, ngjashëm si në rastin b), rrjedh që:

$$x = 47897 + 1265 = 49162.$$

Prova: $49162 - 1265 = 47897$ është barazim i saktë.

Vërejtje: Duke pasur parasysh arsyetimet përkatëse detyrat e mësipërme, shkurt, zgjidhen kështu:

a) $x + 25 = 139$	b) $x - 12 = 9$	c) $37 - x = 18$	ç) $328 + x = 2169$	d) $6749 - x = 1356$
$x = 139 - 25$	$x = 9 + 12$	$x = 37 - 18$	$x = 2169 - 328$	$x = 6749 - 1356$
$x = 114;$	$x = 21;$	$x = 19;$	$x = 1841;$	$x = 5393;$

❶ SHEMBULLI 45.

Të zgjidhet ekuacioni $(x - 8) + 12 = 23$.

❶ ZGJIDHJE 1

Shprehjen $x - 8$ e shohim si një mbledhorë të panjohur, 12 është mbledhori tjetër dhe 23 shuma. Prandaj:

$$x - 8 = 23 - 12 \text{ d.m.th. } x - 8 = 11.$$

Në ekuacionin e fundit, i panjohur është i zbritëshmi x , 8 është zbritësi dhe 11 është ndryshimi. Prandaj:

$$x = 11 + 8, \text{ d.m.th. } x = 19.$$

Pra, $x = 19$ është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.

Prova: për $x = 19$ ekuacioni i dhënë $(x - 8) + 12 = 23$ shndërrohet në barazimin numerik $(19 - 8) + 12 = 23$, d.m.th. $11 + 12 = 23$, i cili është i vërtetë.

❶ ZGJIDHJE 2

Ekuacionin e dhënë mund ta zgjidhim edhe kështu: atë e shkruajmë në formën: $x - 8 + 12 = 23$ ose $x + 12 - 8 = 23$, d.m.th. $x + 4 = 23$, prej nga rrjedh që $x = 23 - 4 = 19$. Pra, $x = 19$ është zgjidhja e kërkuar.

Ekuacionet shfrytëzohen në zgjidhjen e problemeve praktike nga jeta e përditshme. Në zgjidhjen e problemeve të tilla së pari duhet të dallohet çka është e panjohur (çka kërkohet të gjendet) dhe çka është dhënë (çka dihet), pastaj, nga kushtet e detyrës duhet të formohet një ekuacion zgjidhja e të cilit na jep zgjidhjen e problemit. E ilustruam këtu në shembujt vijues.

❶ SHEMBULLI 46.

a) Për dy fustana Zana pagoi 226 euro. Nëse fustani i parë ka kushtuar 110 euro, sa ka kushtuar fustani i dytë? Cili fustan ka kushtuar më lirë? Për sa euro më lirë ka kushtuar ai fustan ?

b) Artani i kishte 1345 euro. Pasi që ia huazoi shokut të tij, Besartit, një shumë eurosh, atij i mbeten 875 euro. Sa euro ia ka huazuar Artani Besartit? A më shumë euro i kanë mbetur Artanit (pas huazimit) apo më shumë euro i ka huazuar ai Besartit? Për sa euro e tejkalon shuma e eurove të mbetura Artanit shumën e huazuar Besartit ?

c) Sa dele kishte bariu, nëse pas shitjes së 26 deleve, i mbeten 98 dele ?

ç) Në një koncert kanë marrë pjesë 916 gra, burra dhe fëmijë. Prej tyre 298 kanë qenë gra dhe 374 burra. Sa fëmijë kanë qenë në atë koncert ?

d) Është dhënë numri 357624 . Të shkruhet numri që i ka të njëjtat shifra, por në radhitje të kundërt. Cili nga këta dy numra është më i madh ? Pse? Për sa është ai më i madh ?

! ZGJIDHJE

a) I panjohur është (kërkohet të gjendet) çmimi i fustanit të dytë; e shënojmë atë me x (të shprehur në euro). Meqë fustani i parë ka kushtuar 110 euro kurse të dy fustanat 226 euro, përfundojmë që:

$$110 + x = 226.$$

$$x = 226 - 110, \text{ d.m.th. } x = 116.$$

Pra, fustani i dytë ka kushtuar 116 euro.

Meqë $110 < 116$, përfundojmë që fustani i parë ka kushtuar më lirë se fustani i dytë.

Meqë $116 - 110 = 6$, përfundojmë që fustani i parë ka kushtuar për 6 euro më lirë se fustani i dytë (ose fustani i dytë ka kushtuar për 6 euro më shtrenjtë se fustani i parë).

b) Kërkohet të gjendet (është e panjohur) shuma e eurove që Artani ia ka huazuar Besartit. E shënojmë atë shumë me x . Pasi që Artani i kishte 1345 euro dhe meqë pas huazimit të x eurove atij i mbetën 875 euro, përfundojmë që:

$$1345 - x = 875.$$

$$x = 1345 - 875, \text{ d.m.th. } x = 470.$$

Kështu, Artani i ka huazuar Besartit 470 euro.

Meqë $875 > 470$, përfundojmë që Artanit (pas huazimit) i kanë mbetur më shumë euro se sa që i ka huazuar Besartit.

Meqë $875 - 470 = 405$, përfundojmë që shuma e eurove të mbetura Artanit (pas huazimit) e tejkalon (është më e madhe) për 405 euro shumën e huazuar Besartit.

c) Shënojmë me x numrin e deleve që kishte bariu. Pasi që pas shitjes së 26 deleve, bariut i kishin mbetur 98 dele, përfundojmë që

$$x - 26 = 98.$$

$$x = 98 + 26, \text{ d.m.th. } x = 124.$$

Bariu i kishte 124 dele.

ç) Le të jetë x numri (i panjohur) i fëmijëve që kanë marrë pjesë në koncert. Meqë në koncert kanë marrë pjesë 298 gra, 374 burra dhe x fëmijë dhe meqë në atë koncert kanë qenë gjithësej 916 pjesëmarrës, përfundojmë që

$$298 + 374 + x = 916.$$

$$672 + x = 916$$

$$x = 916 - 672, \text{ d.m.th. } x = 244.$$

Pra, në koncert kanë qenë 244 fëmijë.

d) Numri që i ka të njëjtat shifra si numri i dhënë 357653, por në radhitje të kundërtët është 356753.

Numri 357653 është më i madh se numri 356753 (d.m.th. $357653 > 356753$) sepse, ata kanë numër të njëjtë shifrash, dy shifrat e para (nga e majta) i kanë të njëjta kurse shifrat e treta të tyre 7 dhe 6 janë të ndryshme dhe $7 > 6$.

Numri 357653 është më i madh se numri 356753 për aq sa është ndryshimi i tyre, d.m.th. për $357653 - 356753 = 900$.

! SHEMBULLI 47.

- a) Të gjendet numri ndryshimi i të cilit me numrin 15 është 40.
b) Të gjendet numri në qoftë se dihet që shuma e numrit për 5 më të madh se ai numër dhe e numrit 134 është numri 297.
c) Po t'i shtojmë numrit të nxënësve të klasës së pestë 32 nxënësit e klasës së katërt bëhen gjithsej 59 nxënës. Sa nxënës i ka klasa e pestë ?
ç) Arbeni është 11 vjeç. Pas sa vjetësh Arbeni do ti ketë 32 vjetë ?
d) Babai i Zanës i ka 42 vjetë. Kur ka lindur Zana ai ka qenë 28 vjeçar. Sa vjeçe është Zana ?

! ZGJIDHJE

a) Le të jetë x numri i kërkuar (panjohur). Meqë ndryshimi i tij me numrin 15 është 40, kemi ekuacionin: $x - 15 = 40$. Prandaj,

$$x = 40 + 15, \text{ d.m.th. } x = 55.$$

Përgjigja: Numri i kërkuar është 55.

b) Le të jetë x numri i panjohur. Numri për 5 më i madh se ai është numri $x + 5$.

Meqë shuma e këtij numri me numrin 134 është numri 297, kemi ekuacionin: $(x + 5) + 134 = 297$. Prandaj,

$$x + 5 = 297 - 134$$

$$x + 5 = 163$$

$$x = 163 - 5, \text{ d.m.th. } x = 158.$$

Përgjigja: 158 është numri i kërkuar.

c) Le të jetë x numri (i panjohur) i nxënësve të klasës së pestë. Meqë kur këtij numri x i shtojmë numrin 32 të nxënësve të klasës së katërt, bëhen 59 nxënës, kemi këtë ekuacion: $x + 32 = 59$. Prandaj,

$$x = 59 - 32, \text{ d.m.th. } x = 27$$

Përgjigja: Klasa e pestë i ka pasë 27 nxënës.

ç) Këtu kërkohet të gjendet numri i viteve pas të cilave Arbeni do t'i ketë 32 vjetë. E shënojmë me x numrin e tillë. Meqë Arbeni është 11 vjeç, ai pas x viteve do ti ketë $11 + x$ vjetë. Prandaj, sipas kushtit të detyrës kemi ekuacionin $11 + x = 32$, kështu që:

$$x = 32 - 11, \text{ d.m.th. } x = 21.$$

Pra, pas 21 vjetësh Arbeni do t'i ketë 32 vjetë. (Prova: vërtetë, pas 21 vjetësh Arbeni do t'i ketë $11 + 21 = 32$ vjetë).

d) Le të jenë x vitet që ka Zana. Meqë babai i Zanës i ka 42 vjetë, kur ka lindur Zana ai i ka pasur x vjetë më pak, d.m.th. $42 - x$ vjetë. Meqë kur ka lindur Zana i ati i ka pasur 28 vjetë, përfundojmë që:

$$42 - x = 28.$$

$$x = 42 - 28, \text{ d.m.th. } x = 14.$$

Përgjigja: Zana është 14 vjeçe.

2.1.4.8.2. Zgjidhja e ekuacioneve të formave : $ax = b$, $x : a = b$, $a : x = b$, $ax \pm b = c$, $x : a \pm b = c$, $a : x \pm b = c$.

! SHEMBULLI 48.

- a) $3x = 15$; b) $23x = 161$; c) $x : 12 = 9$; ç) $x : 27 = 35$; d) $24 : x = 8$;
dh) $156 : x = 12$; e) $3x + 2 = 8$; ë) $16x - 7 = 25$; fj) $x : 4 + 3 = 23$;
g) $12 : x + 5 = 9$; gj) $63 : x - 5 = 4$; i) $8(x - 7) = 512$; j) $123(x + 2) = 492$;
k) $(x + 5) : 3 = 24$; l) $(5x + 3) : 4 = 12$; ll) $18 : (x - 3) = 3$; m) $84 : (2x + 1) = 4$.

! ZGJIDHJE

a) Në ekuacionin $3x = 15$, 3 dhe x janë faktorët prodhimi i të cilëve është 15. Prandaj:

faktori $x = (\text{prodhimi}) : (\text{faktori tjetër}) = 15 : 3 = 5$; d.m.th. $x = 5$.

b) Ngjashëm si në rastin a), nga $23x = 161$ rrjedh që $x = 161 : 23$, d.m.th. $x = 7$.

c) Në ekuacionin $x : 12 = 9$ i pjesëtueshmi është x , pjesëtuesi është 12 dhe herësi është 9. Prandaj:

i pjesëtueshmi $x = (\text{pjesëtuesi}) \cdot (\text{herësi}) = 12 \cdot 9 = 108$; d.m.th. $x = 108$.

ç) Ngjashëm si në rastin c),

$$x : 27 = 35$$

$$x = 27 \cdot 35, \text{ d.m.th. } x = 945.$$

d) Në ekuacionin $24 : x = 8$ i pjesëtueshmi është 24, pjesëtuesi është x dhe herësi është 8, prandaj:

pjesëtuesi $x = (\text{i pjesëtueshmi}) : (\text{herësi}) = 24 : 8 = 3$, d.m.th. $x = 3$.

dh) Ngjashëm si në rastin d), shkurt, gjejmë që:

$$156 : x = 12$$

$$x = 156 : 12, \text{ d.m.th. } x = 13.$$

e) Nga $3x + 2 = 8$ rrjedh që $3x$ dhe 2 janë mbledhorë shuma e të cilëve është 8, prandaj

mbledhori $3x = (\text{shuma}) - (\text{mbledhori tjetër}) = 8 - 2 = 6$, d.m.th. $3x = 6$.

Meqë këtu 3 dhe x janë faktorët prodhimi i të cilëve është 6, kemi:

faktori $x = (\text{prodhimi}) : (\text{faktori tjetër}) = 6 : 3 = 2$. Pra, $x = 2$.

ë) Në $16x - 7 = 25$, $16x$ është i zbritëshmi, 7 është zbritësi dhe 25 ndryshimi. Prandaj,

i zbritëshmi $16x = (\text{ndryshimi}) + (\text{zbritësi}) = 25 + 7 = 32$, d.m.th. $16x = 32$.

Meqë 16 dhe x janë faktorët prodhimi i të cilëve është 32, përfundojmë që

faktori $x = (\text{prodhimi}) : (\text{faktori tjetër}) = 32 : 16 = 2$; d.m.th. $x = 2$.

f) Në ekuacionin $x : 4 + 3 = 23$, $x : 4$ dhe 3 janë mbledhorë shuma e të cilëve është 23, prandaj:

mbledhori $x : 4 = (\text{shuma}) - (\text{mbledhori tjetër}) = 23 - 3 = 20$, d.m.th. $x : 4 = 20$.

Në këtë pjesëtim x është i pjesëtueshmi, 4 është pjesëtuesi dhe 20 është herësi, kështu që

i pjesëtueshmi $x = (\text{herësi}) \cdot (\text{pjesëtuesi}) = 20 \cdot 4 = 80$. Pra, $x = 80$.

g) Nga $12 : x + 5 = 9$ rrjedh që $12 : x$ dhe 5 janë mbledhorë shuma e të cilëve është 9, prandaj

mbledhori $12 : x = (\text{shuma}) - (\text{mbledhori tjetër}) = 9 - 5 = 4$, d.m.th. $12 : x = 4$.

Në këtë ekuacion, 12 është i pjesëtueshmi, x është pjesëtuesi dhe 4 është herësi, kështu që

pjesëtuesi $x = (\text{i pjesëtueshmi}) : (\text{herësi}) = 12 : 4 = 3$. D.m.th. $x = 3$.

gj) Nga $63 : x - 5 = 4$ shihet që $63 : x$ është i zbritëshmi, 5 është zbritësi dhe 4 ndryshimi. Prandaj,

i zbritëshmi $63 : x = (\text{ndryshimi}) + (\text{zbritësi}) = 4 + 5 = 9$. D.m.th. $63 : x = 9$.

Këtu, 63 është i pjesëtueshmi, x është pjesëtuesi dhe 9 është herësi. Prandaj,

pjesëtuesi $x = (\text{i pjesëtueshmi}) : (\text{herësi}) = 63 : 9 = 7$, d.m.th. $x = 7$.

i) Në ekuacionin $8(x - 7) = 512$ faktorët janë 8 dhe $(x - 7)$ kurse prodhimi i tyre është 512. Prandaj,

faktori $x - 7 = (\text{prodhimi}) : (\text{faktori tjetër}) = 512 : 8 = 64$, d.m.th. $x - 7 = 64$.

Në këtë ekuacion x është i zbritëshmi, 7 është zbritësi dhe 64 është ndryshimi, prandaj:

i zbritëshmi $x = (\text{ndryshimi}) + (\text{zbritësi}) = 64 + 7 = 71$. D.m.th. $x = 71$ është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.

j) Nga $123(x + 2) = 492$ rrjedh që 123 dhe $x + 2$ janë faktorët kurse 492 është prodhimi, kështu që

faktori $x + 2 = (\text{prodhimi}) : (\text{faktori tjetër}) = 492 : 123 = 4$, d.m.th. $x + 2 = 4$.

Këtu x dhe 2 janë mbledhorët shuma e të cilëve është 4 dhe, kështu,

Mbledhori $x = (\text{shuma}) - (\text{mbledhor tjetër}) = 4 - 2 = 2$, d.m.th. $x = 2$ është zgjidhja e kërkuar.

k) Në ekuacionin $(x + 5) : 3 = 24$ i pjesëtueshmi është $x + 5$, pjesëtuesi është 3 dhe herësi është 24. Prandaj,

i pjesëtueshmi $x + 5 = (\text{pjesëtuesi}) \cdot (\text{herësi}) = 3 \cdot 24 = 72$, d.m.th. $x + 5 = 72$.

Këtu x dhe 5 janë mbledhorët kurse 72 është shuma. Prandaj,

mbledhori $x = (\text{shuma}) - (\text{mbledhori tjetër}) = 72 - 5 = 67$,

d.m.th. $x = 67$ është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.

l) Në $(5x + 3) : 4 = 12$ i pjesëtueshmi është $5x + 3$, pjesëtuesi është 4 dhe herësi është 12. Prandaj,

i pjesëtueshmi $5x + 3 = (\text{pjesëtuesi}) \cdot (\text{herësi}) = 4 \cdot 12 = 48$, d.m.th. $5x + 3 = 48$.

Këtu $5x$ dhe 3 janë mbledhorët kurse 48 është shuma, kështu që

Mbledhori $5x = (\text{shuma}) - (\text{mbledhori tjetër}) = 48 - 3 = 45$, d.m.th. $5x = 45$.

Tash, 5 dhe x janë faktorët dhe 45 është prodhimi, kështu që

faktori $x = (\text{prodhimi}) : (\text{faktori tjetër}) = 45 : 5 = 9$. D.m.th. $x = 9$ është zgjidhja e kërkuar.

ll) Në ekuacionin $18 : (x - 3) = 3$ i pjesëtueshmi është 18, pjesëtuesi është $x - 3$ dhe herësi 3. Prandaj,

pjesëtuesi $x - 3 = (\text{i pjesëtueshmi}) : (\text{herësi}) = 18 : 3 = 6$, d.m.th. $x - 3 = 6$.

Meqë x është i zbritëshmi, 3 është zbritësi dhe 6 ndryshimi, përfundojmë që

I zbritëshmi $x = (\text{ndryshimi}) + (\text{zbritësi}) = 6 + 3 = 9$. D.m.th. $x = 9$.

m) Nga $84 : (2x + 1) = 4$ rrjedh që 84 është i pjesëtueshmi, $2x + 1$ është pjesëtuesi dhe 4 herësi, prandaj

pjesëtuesi $2x + 1 = (\text{i pjesëtueshmi}) : (\text{herësi}) = 84 : 4 = 21$, d.m.th. $2x + 1 = 21$.

Meqë $2x$ dhe 1 janë mbledhorët shuma e të cilëve është 21, përfundojmë që

mbledhori $2x = (\text{shuma}) - (\text{mbledhori tjetër}) = 21 - 1 = 20$, d.m.th. $2x = 20$.

Këtu, 2 është njëri faktorë, x faktori tjetër dhe 20 është prodhimi, kështu që

faktori $x = (\text{prodhimi}) : (\text{faktori tjetër}) = 20 : 2 = 10$. Pra, $x = 10$ është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.

Vërejtje: Duke i pasur parasysh arsyetimet e bëra gjatë zgjidhjes së detyrës së më sipërme, disa nga rastet e asaj detyre, më shkurt, zgjidhen kështu:

a) $3x = 15$

$x = 15 : 3$

$x = 5$;

c) $x : 12 = 9$

$x = 12 \cdot 9$

$x = 108$;

ë) $16x - 7 = 25$

$16x = 25 + 7$

$16x = 32$

$x = 32 : 16$

$x = 2$;

g) $12 : x + 5 = 9$

$12 : x = 9 - 5$

$12 : x = 4$

$x = 12 : 4$

$x = 3$.

Në shembullin vijues do të shqyrtojmë disa probleme me fjalë të cilat zgjidhen me ndihmën e ekuacioneve të formave të mësipërme.

❶ SHEMBULLI 49.

a) Artani në bibliotekën e tij e ka trefishin e librave që ka Zana në bibliotekën e saj. Nëse Artani i ka 371 libra, sa libra i ka Zana?

b) Të gjenden tre numra të njëpasnjëshëm, nëse shuma e tyre është 3063.

c) Numri 253 është 12 herë më i vogël se një numër tjetër. Cili është ai numër?

ç) Në një hambar ndodhen 1840 kg grurë. Sa thasë mund të mbushen me atë grurë, nëse secili thes nxë 80 kg grurë?

d) Një fabrikë për prodhimin e kompjuterëve për dy muaj prodhoi 2632 kompjuterë. Në qoftë se muajin e dytë u prodhuan 548 kompjuterë më shumë se në muajin e parë, nga sa kompjuterë u prodhuan në secilin muaj?

dh) Arditi dhe Bardhi së bashku i kanë 3865 euro. Bardhi ka 152 euro më pak se dyfishi i eurove që ka Arditi. Sa euro i ka çdonjëri prej tyre?

e) Sa herë duhet zvogëluar numrin 34560 në mënyrë që shuma e numrit të zvogëluar dhe 2137 të jetë e barabartë me 5977?

! ZGJIDHJE

a) Le të jetë x numri i librave të Zanës. Meqë Artani e ka trefishin e librave që ka Zana, Artani i ka $3 \cdot x$ libra. Meqë dihet se Artani i ka 372 libra, përfundojmë që

$$\begin{aligned} 3 \cdot x &= 372 \\ x &= 372 : 3, \text{ d.m.th. } x = 124. \end{aligned}$$

Përgjigja: Zana i ka 124 libra.

b) Në qoftë se x është numri i parë, atëherë $x + 1$ dhe $(x + 1) + 1 = x + 2$ janë dy numrat tjerë të njëpasnjëshëm. Shuma e tyre është

$$x + (x + 1) + (x + 2) = x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3.$$

Meqë dihet që shuma e tre numrave të kërkuar është 3063, përfundojmë që:

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= 3063, \\ 3x &= 3063 - 3 \\ 3x &= 3060 \\ x &= 3060 : 3, \text{ d.m.th. } x = 1020. \end{aligned}$$

Përgjigja: Numrat e kërkuar janë 1020, $1020 + 1 = 1021$ dhe $1020 + 2 = 1022$.

c) Le të jetë x numri i panjohur. Numri 12 herë më i vogël se ai është $x : 12$. Meqë, sipas kushtit të detyrës, ky numër është i barabartë me 253, kemi:

$$\begin{aligned} x : 12 &= 253. \\ x &= 12 \cdot 253, \text{ d.m.th. } x = 3036. \end{aligned}$$

Përgjigja: 3036 është numri i kërkuar.

ç) Le të jetë x numri i thasëve. Nëse sasinë e grurit në hambarë prej 1840 kg e ndajmë në x thasë, secili thes do të nxë $1840 : x$ kg. Meqë, sipas kushtit të detyrës, secili thes nxë 80 kg, kemi:

$$\begin{aligned} 1840 : x &= 80 \\ x &= 1840 : 80 \\ x &= 184 : 8, \text{ d.m.th. } x = 23. \end{aligned}$$

Përgjigja: Me grurin e hambarit mund të mbushen 23 thasë.

d) Shënojmë me x numrin e kompjuterëve të prodhuar në muajin e parë. Meqë në muajin e dytë u prodhuan 548 kompjuterë më shumë se në muajin e parë, përfundojmë që në muajin e dytë janë prodhuar $x + 548$ kompjuterë. Për dy muajt janë prodhuar $x + x + 548 = 2x + 548$ kompjuterë. Meqë për dy muajt, sipas kushtit të detyrës, janë prodhuar 2632 kompjuterë, kemi:

$$\begin{aligned} 2x + 548 &= 2632 \\ 2x &= 2632 - 548 \\ 2x &= 2174 \\ x &= 2174 : 2, \text{ d.m.th. } x = 1087. \end{aligned}$$

Përgjigja: Muajin e parë janë prodhuar 1087 kompjuterë kurse muajin e dytë janë prodhuar $1087 + 548 = 1545$ kompjuterë.

dh) Shënojmë me x eurot që i ka Arditi. Atëherë $2x$ është dyfishi i eurove të Arditi. Meqë Bardhi i ka 152 euro më pak se dyfishi i eurove të Arditi, përfundojmë që Bardhi i ka $2x - 152$ euro. Arditi dhe Bardhi së bashku kanë $x + 2x - 152 = 3x - 152$ euro. Meqë, sipas kushtit të detyrës, të dytë së bashku kanë 3865 euro, kemi

$$\begin{aligned} 3x - 152 &= 3865. \\ 3x &= 3865 + 152 = 4017 \\ x &= 4017 : 3, \text{ d.m.th. } x = 1339. \end{aligned}$$

Pra, $x = 1339$ dhe $2x - 52 = 2 \cdot 1339 - 152 = 2678 - 152 = 2526$.

Përgjigja: Arditi i ka 1339 euro kurse Bardhi i ka 2526 euro.

e) Le të jetë x numri i herëve për të cilin duhet zvogëluar numrin 34560. Atëherë numri 34560 i zvogëluar për x herë është $34560 : x$. Shuma e këtij numri dhe numrit 2137 është $(34560 : x) + 2137$. Sipas kushtit të detyrës, ky numër është i barabartë me 5977, d.m.th.

$$(34560 : x) + 2137 = 5977.$$

$$34560 : x = 5977 - 2137$$

$$34560 : x = 3840$$

$$x = 34560 : 3840$$

$$x = 3456 : 384 = 9.$$

Përgjigje: Numri 34560 duhet të zvogëlohet 9 herë.

2.1.4.8.3. Zgjidhja e inekuacioneve të formave $ax \pm b < c$, $a - bx < c$, $ax \pm b > c$, $a - bx > b$,

Zgjidhje e një inekuacioni quhet çdo numër (natyror ose 0) i cili kur zëvendësohet në vend të të panjohurës x , e shndërron atë inekuacion në jobarazim të saktë (vërtetë) numerik. Kështu, p.sh. numrat 0, 1, 2, 3 dhe 4 janë zgjidhje të inekuacionit $x + 7 < 12$ sepse për $x = 0, 1, 2, 3, 4$ fitojmë, me radhë, jobarazimet numerike $0 + 7 < 12$, $1 + 7 < 12$, $2 + 7 < 12$, $3 + 7 < 12$, $4 + 7 < 12$, të cilët janë të saktë. Them i që $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ është bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit $x + 7 < 12$. Vëreni që një inekuacion mund të ketë më shumë se një zgjidhje. Por, p.sh. numrat 5 dhe 6 nuk janë zgjidhje të inekuacionit $x + 7 < 12$ sepse për $x = 5$ dhe $x = 6$ fitohen jobarazimet numerike $5 + 7 < 12$ dhe $6 + 7 < 12$ të cilët nuk janë të vërtetë.

Të zgjidhësh një inekuacion d.m.th. të gesh bashkësinë e zgjidhjeve të tij. Në zgjidhjen e inekuacioneve të formave të mësipërme shfrytëzohen këto veti të jobarazimeve numerike:

Në qoftë se të dy anëve të një jobarazimi iu shtojmë (zbresim) të njëjtin numër, jobarazimi nuk ndryshon, d.m.th.

$a < b$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a + c < b + c$ dhe $a - c < b - c$.

Në qoftë se të dy anët e një jobarazimi i shumëzojmë (pjesëtojmë) me të njëjtin numër natyror, jobarazimi nuk ndryshon, d.m.th.

Në qoftë se $a < b$ dhe $c \in \mathbb{N}$, atëherë edhe $a \cdot c < b \cdot c$ dhe $a : c < b : c$.

SHENBULLI 50.

Të gjendet bashkësia e zgjidhjeve të inekuacioneve:

a) $x + 18 < 35$;

b) $26 + x > 185$;

c) $x - 136 \leq 947$;

ç) $5x \leq 15$;

d) $15x > 345$;

e) $x : 35 \leq 17$;

ë) $1056 : x > 132$;

f) $6x : 9 > 18$;

g) $48 : (3x) \leq 2$;

gj) $4x - 275 > 1745$;

i) $37601 - x \geq 1947$;

j) $6452 - 3x < 1394$;

k) $25x + 1270 \geq 11945$;

ZGJIDHJE

a) Të dy anëve të inekuacionit $x + 18 < 35$ iu zbrisim numrin 18, dhe fitojmë:

$$x + 18 - 18 < 35 - 18,$$

$$x + 0 < 17, \text{ d.m.th. } x < 17.$$

Përgjigja: $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$.

b) Të dy anëve të inekuacionit të dhënë $26 + x > 185$ iu zbresim numrin 26 dhe fitojmë:

$$26 + x - 26 > 185 - 26$$

$$x + 26 - 26 > 159 \quad (\text{shfrytzuam vetinë e ndërrimit për +})$$

$$x + 0 > 159, \text{ d.m.th. } x > 159.$$

Përgjigja: {160, 161, 162, ...} është bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë. (Vëreni që kjo bashkësi është e pafundme).

c) Të dy anëve të inekuacionit $x - 136 \leq 947$ iu shtojmë numrin 136 dhe gjejmë:

$$(x - 136) + 136 \leq 947 + 136$$

$$136 + x - 136 \leq 1083 \quad (\text{shfrytzuam vetinë e ndërrimit për +})$$

$$x + 136 - 136 \leq 1083 \quad (\text{shfrytzuam vetinë e ndërrimit për +}),$$

$$x + 0 \leq 1083 \quad \text{d.m.th. } x \leq 1083.$$

Përgjigja: {1, 2, 3, ..., 1083} është bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë.

d) Kur të dy anët e inekuacionit $5x \leq 15$ i pjesëtojmë me 5 gjejmë që

$$5x : 5 \leq 15 : 5 \quad \text{d.m.th. } x \leq 3.$$

Përgjigja: {1, 2, 3} është bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë.

e) Pas pjesëtimit me 15 të të dy anëve të inekuacionit $15x > 345$ gjejmë

$$15x : 15 > 345 : 15, \text{ d.m.th. } x > 23.$$

Përgjigja: {24, 25, 26, ...}.

f) Të dy anët e inekuacionit $x : 35 \leq 17$ i shumëzojmë me 35 dhe fitojmë:

$$(x : 35) \cdot 35 \leq 17 \cdot 35 = 595.$$

Meqë,

$$(x : 35) \cdot 35 = (\text{herësi}) \cdot (\text{pjesëtuesi}) = i \text{ pjesëtueshmi} = x, \text{ d.m.th. } (x : 35) \cdot 35 = x \text{ përfundojmë që } x \leq 595.$$

Përgjigja: {1, 2, 3, ..., 595}.

g) Pas shumëzimit të të dy anëve të inekuacionit $1056 : x > 132$ me numrin x gjejmë se:

$$(1056 : x) \cdot x > 132 \cdot x.$$

$$\text{Por, } (1056 : x) \cdot x = (\text{herësi}) \cdot (\text{pjesëtuesi}) = i \text{ pjesëtueshmi} = 1056,$$

$$\text{d.m.th. } (1056 : x) \cdot x = 1056, \text{ kështu që}$$

$$1056 > 132 \cdot x.$$

Të dy anët e inekuacionit të fundit i pjesëtojmë me 132 dhe fitojmë:

$$1056 : 132 > 132x : 132, \text{ d.m.th. } 8 > x. \text{ Pra, } x < 8.$$

Përgjigja: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

h) Shumëzojmë të dy anët e inekuacionit $6x : 9 > 18$ me 9 dhe marrim

$$(6x : 9) \cdot 9 > 18 \cdot 9, \text{ d.m.th. } 6x > 162.$$

Të dy anët e inekuacionit të fundit i pjesëtojmë me 6; gjejmë që

$$6x : 6 > 162 : 6, \text{ d.m.th. } x > 27.$$

Përgjigja: {28, 29, 30, ...}.

i) Të dy anët e inekuacionit $48 : 3x \leq 2$ i shumëzojmë me $3x$ dhe gjejmë që

$$[(48 : (3x)) \cdot 3x \leq 2 \cdot 3x, \text{ d.m.th. } 48 \leq 6x.$$

Të dy anët e inekuacionit të fundit i pjesëtojmë me 6 dhe fitojmë

$$48 : 6 \leq 6x : 6, \text{ d.m.th. } 8 \leq x. \text{ Pra, } x \geq 8.$$

Përgjigja: {8, 9, 10, 11, ...}.

gj) Të dy anëve të inekuacionit $4x - 275 > 1745$ iu shtojmë numrin 275,

$$(4x - 275) + 275 > 1745 + 275$$

$$275 + 4x - 275 > 2020 \quad (\text{shfrytëzuam vetinë e ndërrimit për +})$$

$$4x + 275 - 275 > 2020 \quad (\text{shfrytëzuam vetinë e ndërrimit për +})$$

$$4x + 0 > 2020, \text{ d.m.th. } 4x > 2020.$$

Të dy anët e inekuacionit të fundit i pjesëtojmë me 4 dhe gjejmë që:

$$4x : 4 > 2020 : 4 \quad \text{d.m.th. } x > 505.$$

Përgjigja: {506, 507, 508, ...} është bashkësia e zgjidhjeve.

i) Kur të dy anëve të inekuacionit $37601 - x \geq 1947$ iu shtojmë numrin x , fitojmë:

$$37601 - x + x \geq 1947 + x$$

$$37601 \geq 1947 + x.$$

Të dy anëve të këtij inekuacioni iu zbrsim numrin 1947 dhe gjejmë:

$$37601 - 1947 \geq 1947 + x - 1947$$

$$35654 \geq x + 1947 - 1947$$

$$35654 \geq x + 0, \text{ d.m.th. } x \leq 35654.$$

Përgjigja: {1, 2, 3, ..., 35654} është bashkësia e zgjidhjeve.

j) Nëse të dy anëve të inekuacionit $6452 - 3x < 1394$ iu shtojmë numrin (e panjohur) $3x$, gjejmë që:

$$(6452 - 3x) + 3x < 1394 + 3x$$

$$3x + 6452 - 3x < 1394 + 3x \quad (\text{shfrytëzuam vetinë e ndërrimit për +})$$

$$6452 + 3x - 3x < 1394 + 3x \quad (\text{shfrytëzuam vetinë e ndërrimit për +})$$

$$6452 + 0 < 3x + 1394$$

$$6452 < 3x + 1394.$$

Tash, të dy anëve të inekuacionit të fundit iu zbrsim numrin 1394, dhe fitojmë

$$6452 - 1394 < 3x + 1394 - 1394, \text{ d.m.th. } 5058 < 3x.$$

Të dy anët e inekuacionit të fundit i pjesëtojmë me 3 dhe gjejmë që

$$5058 : 3 < 3x : 3 \quad \text{d.m.th. } 1686 < x. \text{ Pra, } x > 1686.$$

Përgjigja: {1687, 1688, 1689, ...}.

k) Nga të dy anët e inekuacionit $25x + 1270 \geq 11945$ zbrsim numrin 1270 :

$$25x + 1270 - 1270 \geq 11945 - 1270$$

$$25x + 0 \geq 10675, \text{ d.m.th. } 25x \geq 10675.$$

Të dy anët e inekuacionit të fundit i pjesëtojmë me 25 dhe fitojmë

$$25x : 25 \geq 10675 : 25, \text{ d.m.th. } x \geq 427.$$

Përgjigja: {427, 428, 429, ...} është bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë.

Në shembullin vijues japim zgjidhjen e disa problemave nga jeta e përditshme me anën e inekuacioneve.

SHMBOLI 51.

a) Të gjenden të gjithë numrat (natyrorë) shuma e të cilëve me numrin 28 është më e vogël se numri 36.

b) Të gjenden të gjithë numrat (natyrorë) të tillë që kur nga ta zbritet numri 185 të fitohet numri jo më i vogël (d.m.th. më i madh ose i barabartë) se numri 657.

c) Cilët numra duhet t'i shtohen numrit 2953 që të fitohet numri më i madh se numri 6574 ?

ç) Koncerti mund të mbahet nëse shiten së paku 285 bileta. Në qoftë se janë shitur 187 bileta, edhe sa bileta

duhen të shiten së paku, në mënyrë që të mbahet koncerti?

d) Fatlinda kishte të kursyer një shumë eurosh në bankë. Pasi që ajo tërhoqi 100 euro nga banka, i mbeten më së shumti (d.m.th. më pak ose baras me) 550 euro në bankë. Sa euro i kishte Fatlinda më së shumti në bankë në fillim?

dh) Arbeni i ka 120 euro. Ai dëshiron të blejë një palë pantollona dhe një xhaketë. Nëse pantollonat kushtojnë 10 euro më shumë se sa kushton xhaketa, sa duhet të jetë çmimi më lartë i mundshëm i xhaketës e sa i pantollonova, në mënyrë që Arbeni me eurot që i ka, ti blejë pantollonat dhe xhaketën?

! ZGJIDHJE

a) Le të jetë x njëri nga numrat e kërkuar. Shuma e tij me numrin 28 është $x + 28$. Meqë kjo shumë duhet të jetë më e vogël se 36, kemi inekuacionin

$$\begin{aligned}x + 28 &< 36. \\x &< 36 - 28, \text{ d.m.th. } x < 8.\end{aligned}$$

Prandaj, numrat e kërkuar janë 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

b) Le të jetë x njëri nga numrat e kërkuar. Kur nga ky numër zbritet numri 185 fitohet ndryshimi $x - 185$. Meqë, sipas kushtit të detyrës, ky ndryshim duhet të jetë jo më i vogël (d.m.th. më i madh ose baras) me numrin 675, kemi:

$$x - 185 \geq 675$$

Të dy anëve të këtij inekuacioni i shtojmë numrin 185 dhe gjejmë që:

$$\begin{aligned}x &\geq 675 + 185 \\x &\geq 860.\end{aligned}$$

Pra, të gjithë numrat e kërkuar janë: 860, 861, 862, ...

c) Le të jetë x njëri nga numrat e kërkuar. Kur ky numër i shtohet numrit 2953 fitohet numri $2953 + x$. Meqë, sipas kushtit të detyrës, ky numër duhet të jetë jo më i madh se numri 6574, kemi:

$$\begin{aligned}2953 + x &> 6574. \\x &> 6574 - 2953 \\x &> 3621.\end{aligned}$$

Kështu, numrat e kërkuar janë: 3622, 3623, 3624, ...

ç) Le të jetë x numri i biletave që duhen të shiten së paku, që të mbahet koncerti. Meqë më parë janë shitur 187 bileta, numri i të gjitha biletave të shitura (në mënyrë që të mbahet koncerti) është $x + 187$. Meqë koncerti mbahet nëse shiten së paku (d.m.th. më shumë ose barazi) 285 bileta, përfundojmë që:

$$\begin{aligned}x + 187 &\geq 285. \\x &\geq 285 - 187, \text{ d.m.th. } x \geq 98.\end{aligned}$$

Pra, duhen të shiten edhe së paku 98 (d.m.th. 98 ose më shumë) bileta në mënyrë që të mbahet koncerti.

d) Le të jetë x shuma e eurove që kishte Fatlinda në bankë në fillim. Pasi që ajo i tërhoqi 100 euro, asaj i kanë mbetur $x - 100$ euro në bankë. Meqë kjo shumë ishte më e vogël ose barazime (d.m.th. më së shumti) 550 euro, përfundojmë që:

$$\begin{aligned}x - 100 &\leq 550. \\x &\leq 550 + 100, \text{ d.m.th. } x \leq 650.\end{aligned}$$

Pra, Fatlinda kishte në fillim më së shumti 650 euro në bankë.

dh) Le të jetë x euro çmimi më i lartë i xhaketës. Meqë pantollonat kushtojnë 10 euro më shumë se xha-

keta, çmimi më i lartë i mundshëm i pantollonave do të jetë $x + 10$ euro. Atëherë, xhaketa dhe pantollonat, sëbashku, do të kushtojnë

$$x + (x + 10) = 2x + 10 \text{ euro.}$$

Meqë Arbeni i ka 120 euro, që të ketë mundësi t'i blejë pantollonat dhe xhaketen, duhet të jetë:

$$2x + 10 \leq 120$$

$$2x \leq 120 - 10$$

$$2x \leq 110$$

$$x \leq 110 : 2, \text{ d.m.th. } x \leq 55.$$

Pra, $x \leq 55$ dhe $x + 10 \leq 65$, kështu që, xhaketa më së shumti duhet të kushtojë 55 euro kurse pantollonat më së shumti mund të kushtojnë 65 euro, në mënyrë që Arbeni t'i blejë ato me eurot që i ka.

Vërejtje. Ekuacionet dhe inekuacionet e formave të mësipërme nuk kanë gjithmonë zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë. Prandaj, mësimdhënësi/sja duhet të jetë i kujdesshëm gjatë sajimit të detyrave dhe problemeve në lidhje me ekuacionet dhe inekuacionet e formave të mësipërme, në mënyrë që zgjidhjet e tyre të jenë numra natyrorë.

2.1.4.9. Vargjet numerike

Në qoftë se çdo numri natyrorë n i shoqërojmë, sipas një rregulle të caktuar, një (dhe vetëm një) numër a_n fitojmë **vargun numerik**

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

a_1 quhet *anëtari* (ose *kufiza e*) *i parë*, a_2 - *anëtari* (*kufiza e*) *i dytë*, ..., a_n - *anëtari* (*kufiza*) *n-të* i vargut të mësipërm. Me fjalë të tjera, **vargu është një renditje e numrave sipas një rregulle të caktuar.**

Kështu, p.sh. në qoftë se çdo numri natyror n ia shoqërojmë

1. vetveten e tij n , fitojmë vargun:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots;$$

2. dyfishin e tij $2n$, fitojmë vargun:

$$2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, \dots, 2n, \dots, \text{ d.m.th. } 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

3. numrin për 3 më të madh $n + 3$, fitojmë vargun:

$$1 + 3, 2 + 3, 3 + 3, 4 + 3, \dots, n + 3, \dots \text{ d.m.th. } 4, 5, 6, 7, \dots, n + 3, \dots$$

4. numrin sa dyfishi i tij i zvogëluar për 3, d.m.th. numrin $2n - 3$, duke filluar me $n = 2$, fitojmë vargun:

$$2 \cdot 2 - 3, 2 \cdot 3 - 3, 2 \cdot 4 - 3, 2 \cdot 5 - 3, \dots, 2n - 3, \dots, \text{ d.m.th. } 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n - 3, \dots$$

Vërejmë që i njëjti varg fitohet edhe duke i shoqëruar çdo numri natyror n numrin $2n - 1$, d.m.th. dyfishin e tij të zvogëluar për 1. (Është ky **vargu i numrave tek**).

5. pasardhësin e tij $n + 1$, fitojmë vargun:

$$1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1, 5 + 1, \dots, n + 1, \dots, \text{ d.m.th. } 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n + 1, \dots$$

SHMBOLI 52.

Gjeni rregullën sipas të cilës është ndërtuar vargu dhe shkruani edhe disa anëtarë tjerë të atij vargu:

- a) 3, 8, 13, 18, 23, ... ; b) 1, 5, 9, 13, 17, ... ; c) 3, 9, 27, 51, 81, ... ;
 ç) 2, 8, 32, 128, 512 ... ; dh) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ; dh) 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, ... ;
 e) 3, 6, 10, 15, 21, ... ;

ZGJIDHJE

a) Vërejmë që: $3 + 5 = 8$; $8 + 5 = 13$; $13 + 5 = 18$; $18 + 5 = 23$, ... ose: $8 - 3 = 5$, $13 - 8 = 5$, $18 - 13 = 5$, $23 - 18 = 5$, ... Prandaj, vargu i dhënë është *vargu anëtar* (kufiza) i parë i të cilit është 3 kurse çdo anëtarë tjetër është për 5 më i madh se anëtarin paraprak. Ose: *vargu i dhënë fillon me numrin 3 dhe ndryshimi i çdo dy anëtarëve të njëpasnjëshëm është i barabartë me 5*. Meqë $23 + 5 = 28$, $28 + 5 = 33$, $33 + 5 = 38$, ..., përfundojmë që 28, 33, 38, 43, ... janë edhe disa anëtarë tjerë të vargut të dhënë. Pra, 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, ...

b) Ngjashëm si në rastin a), vërehet që *vargu i dhënë e ka anëtarin e parë 1, kurse çdo anëtarë tjetër i tij është për 4 më i madh se anëtarin paraprak*. Ose: *vargu i dhënë e ka anëtarin e parë 1 dhe ndryshimi i çdo dy anëtarëve të njëpasnjëshëm të tij është madhësi konstante e barabartë me 4*. Meqë $17 + 4 = 21$, $21 + 4 = 25$, $25 + 4 = 29$, $29 + 4 = 33$, ..., përfundojmë që 21, 25, 29, 33, ... janë edhe katër anëtarë tjerë të vargut të dhënë. D.m.th. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, ...

(Vargu i numrave $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, ndryshimi i çdo dy anëtarëve të njëpasnjëshëm të të cilit është madhësi konstante d , (d.m.th. $a_{n+1} - a_n = d$), quhet **varg arithmetik me diferencën d** . Kështu, p.sh. vargjet në rastin a) dhe b) janë vargje arithmetike, i pari me diferencën 5 e i dyti me diferencën 4).

c) Vërejmë që $3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 9 = 27$, $3 \cdot 27 = 81$, Ose: $9 : 3 = 3$, $27 : 9 = 3$, $81 : 27 = 3$, D.m.th. *vargu i dhënë e ka anëtarin e parë 3 kurse çdo anëtarë tjetër i tij është sa trefishi (d.m.th. tre herë më i madh se) anëtarin paraprak*. Ose, *anëtarin e parë i vargut të dhënë është 3, kurse herësi i çdo dy anëtarëve të njëpasnjëshëm të tij është madhësi konstante e barabartë me 3*. Meqë $3 \cdot 81 = 243$, $3 \cdot 243 = 729$, $3 \cdot 729 = 2187$, ..., përfundojmë që 243, 729, 2187, ... janë edhe tre anëtarë tjerë të vargut të dhënë. Pra, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ...

(Vargu i numrave $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, herësi i çdo dy anëtarëve të njëpasnjëshëm të të cilit është madhësi konstante q , ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$), quhet **varg gjeometrik me herësin q** . Kështu, p.sh. vargjet në rastin c) dhe ç) janë vargje gjeometrike, i pari me herësin 3 e i dyti me herësin 4).

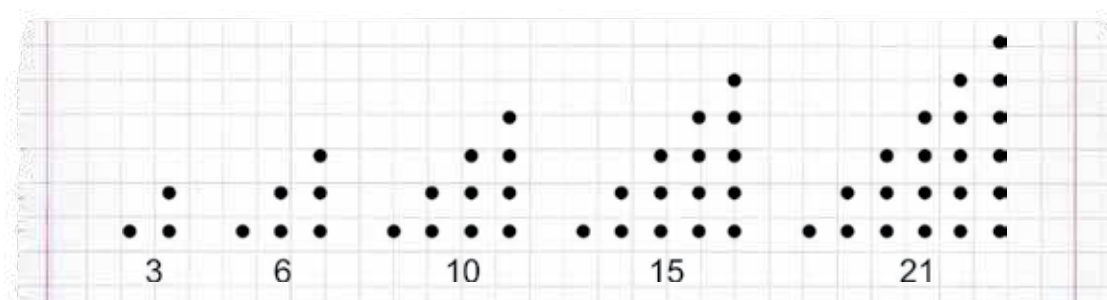
d) Meqë $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$, $5 + 8 = 13$, $8 + 13 = 21$ përfundojmë që anëtarin e parë i vargut të dhënë është 1, anëtarin e dytë është 2 kurse, duke filluar nga anëtarin e tretë, *çdo anëtar i tij është i barabartë me shumën e dy anëtarëve paraardhës*. Duke pasur parasysh këtë rregull, disa anëtarë tjerë të këtij vargu janë $13 + 21 = 34$, $21 + 34 = 55$, $34 + 55 = 89$, $55 + 89 = 144$. D.m.th. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

(Vargu i numrave $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ çdo anëtar i të cilit, duke filluar nga i tretë, është i barabartë me shumën e dy anëtarëve paraardhës, ($a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$), quhet **vargu i Fibonaçit**).

dh) Meqë $1 + 2 + 3 = 6$, $2 + 3 + 6 = 11$, $3 + 6 + 11 = 20$, $6 + 11 + 20 = 37$, përfundojmë që anëtarin e parë i vargut të dhënë është 1, anëtarin e dytë është 2 dhe anëtarin e tretë është 3 kurse, duke filluar nga anëtarin e katërt, *çdo anëtar i vargut është i barabartë me shumën e tre anëtarëve paraardhës*. Duke pasur parasysh këtë rregull, disa anëtarë tjerë të këtij vargu janë $11 + 20 + 37 = 68$, $20 + 37 + 68 = 125$, $37 + 68 + 125 = 230$, ... D.m.th. 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125, 230, 423, ...

e) Anëtarin e parë i këtij vargu është $a_1 = 3$; anëtarin e dytë është $a_2 = a_1 + 3 = 3 + 3 = 6$; anëtarin e tretë është $a_3 = a_2 + 4 = 6 + 4 = 10$; anëtarin e katërt është $a_4 = a_3 + 5 = 10 + 5 = 15$, ..., anëtarin e n -të është $a_n = a_{n-1} + n$

+ 1, Me fjalë të tjera, vargu i dhënë e ka anëtarin e parë 3; anëtari i dytë 6 merret duke ia shtuar anëtarit të parë (3) numrin 3; anëtari i tretë 10 merret duke ia shtuar anëtarit të dytë 6 numrin 4; anëtari i katërt (15) merret duke ia shtuar anëtarit të tretë (10) numrin 5; Prandaj, disa anëtarë tjerë të këtij vargu janë $21 + 6 = 27$; $27 + 7 = 34$; $34 + 8 = 42$; $42 + 9 = 51$; $51 + 10 = 61$, $61 + 11 = 72$ etj. D.m.th. 3, 6, 10, 15, 21, 27, 34, 42, 51, 61,...



Vërejmë që anëtarët e vargut të dhënë mund t'i paraqesim me anën e pikëve si në figurën e mësipërme. Duke pasur parasysh numrin e pikëve në figurën e mësipërme, mund të përfundojmë që:

anëtari i parë i vargut është $a_1 = 1 + 2 = 3$;

anëtari i dytë i vargut është $a_2 = 1 + 2 + 3 = 6 = a_1 + 3$;

anëtari i tretë i vargut është $a_3 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = a_2 + 4$;

anëtari i katërt i vargut është $a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = a_3 + 5$; etj.

(Duke pasur parasysh figurën e mësipërme, dikush, anëtarët e vargut të mësipërm i quan *numra trekëndorë*).

SHMBOLI 53.

Të shkruhet vargu i numrave natyrorë

a) anëtari i parë i të cilit është 78 kurse, kurse çdo anëtar tjetër i atij vargu është për 4 më i vogël se anëtari paraprak;

b) anëtari i parë i të cilit është 4 kurse çdo anëtar tjetër i atij vargu është për 5 më i madh se anëtari parardhës;

c) dy anëtarët e parë të të cilit janë 1 dhe 2 kurse, duke filluar nga anëtari i tretë, çdo anëtarë i tij është sa dyfishi i shumës së dy anëtarëve paraprak;

ç) anëtarët e të cilit janë katrorët e numrave natyrorë;

d) anëtarët e të cilit janë kubet e numrave natyrorë;

! ZGJIDHJE

- a) 78, 74, 70, 66, 62, 58, 54, 50, ..., 2; (Ky varg përfundon me numrin 2 dhe, si i tillë, është varg i fundëm).
- b) 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, ...;
- c) $1, 2, 2 \cdot (2+1) = 6, 2 \cdot (2+6) = 16, 2 \cdot (6 + 16) = 44, 2 \cdot (16 + 44) = 120, \dots$, d.m.th. 1, 2, 6, 16, 44, 120, 328, 896, ...;
- ç) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \dots$, d.m.th. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ...;
- d) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, \dots$, d.m.th. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, ...;

III. Thyestat

Shumica e fëmijëve kanë dëshirë të numërojnë dhe të kryejnë veprime të thjeshta aritmetikore, ndërsa momenti kur fillojnë vështirësitë me kuptimet matematikore është atëherë kur kërkohet prej tyre të punojnë me thyesa dhe të kryejnë veprime me to. Thyestat janë mjaft të vështira për fëmijët pasi kërkohet prej tyre ta zbërthejnë një numër të plotë në pjesë gjë të cilën shpesh nuk e kuptojnë.

Për këto arsye, mësimi të thyesave duhet t'i kushtohet rëndësi e veçantë, duke respektuar parimin pedagogjik të gradualitetit dhe duke përdorë vazhdimisht konkretizimin. Thyestat lidhen me jetën e përditshme po aq sa numrat natyrorë, prandaj edhe duhet të sqarohen duke marrë shembuj nga jeta e përditshme. Përderisa mësimdhënësi/sja duhet të jetë mirë i familjarizuar me rregullat që vlejnë për thyesa, në asnjë mënyrë nuk bën të kërkohet nga nxënësit që t'i memorizojnë këto rregulla, sepse kështu shpesh ndërlidhja në mes të asaj që mësojnë dhe jetës së përditshme.

1. Kuptimi i thyesës.

! SHEMBULLI 1.

Shiqojmë figurën 1 dhe përgjigjemi në pyetjet vijuese:



Fig. 1.

- a) Në sa pjesë është i ndarë (pjesëtuar) shiriti ? (Përgjigja: në tetë pjesë.)
- b) Ç' farë janë pjesët ndarëse ? (Përgjigja: të barabarta.)
- c) Ç' pjesë e shiritit është çdo njëra nga pjesët ndarëse ? (Përgjigja: **një e teta**.)
- ç) Cila pjesë e shiritit është hijezuar në figurën :1 a) ? 1 b) ? 1 c) ? (Përgjigja: **dy të tetat, tri të tetat, pesë të tetat**).
- d) Ç' do të ndodhë nëse hijezohen **tetë të tetat** e shiritit ? (Përgjigja: Do të hijezohet i tërë shiriti; pra: **tetë të tetat = një e plotë**).
- dh) Po të ndahej shiriti në: dy; tri; katër; pesë; ... pjesë të barabarta, ç' pjesë e shiritit do të ishte çdo njëra nga pjesët ndarëse ? (Përgjigja: **Një e dyta** (ose **gjysma**); një **e treta**, **një e katërta** (ose **çereku**); **një e pesta**; ...).
- e) A ju mjafton vetëm një shirit për të formuar **nëntë të tetat, dhjetë të tetat, gjashtëmbëdhjetë të tetat** ? (Përgjigja: jo !). Si do të veprojmë në këtë rast ? (Përgjigja: do të marrim dy (ose më shumë) shirita të barabartë dhe do t'i ndajmë ata në nga tetë pjesë të barabarta). (Shih Fig. 2).
- ë) Ç' pjesë të shiritit (njësisë = një të plote) paraqet pjesa e hijezuar (e dy shiritave) në Fig. 2a); 2b); 2c); 2 ç) (Përgjigja: **nëntë të tetat, dhjetë të tetat, katërmëdhjetë të tetat, gjashtëmbëdhjetë të tetat = dy të plote**).

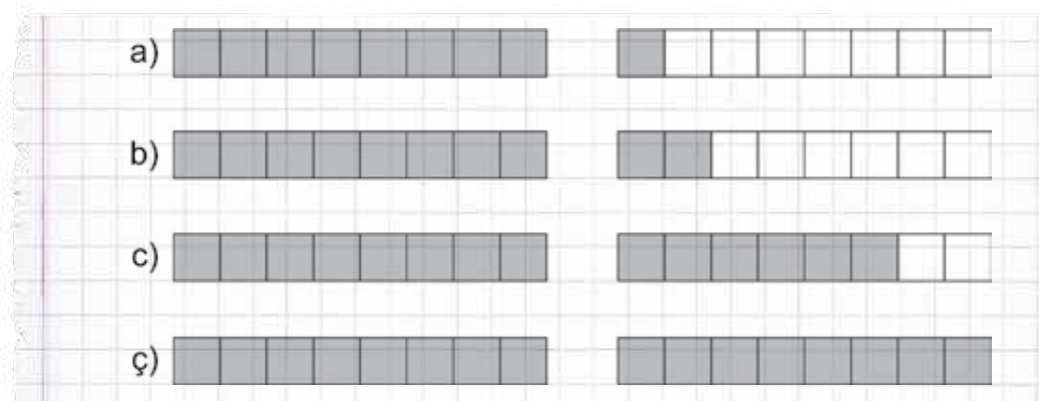


Fig. 2.

Nga përgjigjet në pyetjet e shembullit të mësipërm mund të përfundojmë që:

- Në qoftë se një e plotë (apo një njësi, një tërësi) ndahet (pjesëtohet) në pjesë të barabarta, atëherë çdo njëra nga pjesët ndarëse quhet **njësi thyesore** ose **pjesë thyesore**.
- Njësitë thyesore emërtohen **të dytat, të tretat, të katërtat, ..., të dhjetat, ...**,

varësisht nga numri që tregon se sa njësi të tilla formojnë një të plotë (njësinë, tërësinë) (dy të dytat; tri të tretat; katër të katërtat, ..., dhjetë të dhjetat, ... formojnë një të plotë (një njësi), një tërësi); ato shënohen me numrorët $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{10}, \dots$, përkatësisht.

- Numrat **nëntë të tetat, dhjetë të tetat, katërmëdhjetë të tetat**, që tregojnë se sa **të tetat** (njësi thyesore) nevojiten për t'i formuar ata numra, shënohen, përkatësisht me numrorët $\frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \frac{14}{8}$

Numra thyesorë ose, shkurt, thyesa quhen numrat që tregojnë një ose disa pjesë të barabarta të një të plote (tërësie, njësie).

Kështu, p.sh. *një e teta, një e katërta, një e shtata, nëntë të tetat, dymbëdhjetë të pestat, pesëmbëdhjetë të shtatat* janë thyesa (numra thyesorë) që paraqiten me numrorët $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{9}{8}, \frac{12}{5}, \frac{15}{7}$, përkatësisht.

Çdo thyesë paraqitet me anën e dy numrave të plotë a, b në formën $\frac{a}{b}$. Kështu, thyesa përbëhet prej dy numrave të plotë a dhe b dhe një vije horizontale $-$; numri a quhet **numëruesi**, numri b quhet **emëruesi** dhe $-$ quhet **vija thyesore** e thyesës $\frac{a}{b}$. Kjo thyesë lexohet “*a thye për b*” ose “*a pjesëtue për b*” ose “*a mbi b*”.

Emëruesi b tregon që e plota (njësia) është ndarë në b pjesë; numëruesi a tregon që janë marrë a pjesë të tilla për të formuar thyesën $\frac{a}{b}$.

Kështu p.sh. në thyesën $\frac{5}{7}$ numri 7 është **emëruesi** i cili tregon se e plota (tërësia, njësia) është ndarë në 7 pjesë të barabarta; numri 5 është **numëruesi** dhe ai tregon se sa pjesë të tilla (të shtatat) janë marrë për të formuar atë thyesë; thyesa e tillë lexohet “*pesë të shtatat*”, por edhe “*pesë thye për shtatë*” ose “*pesë pjesëtue për shtatë*”.

! SHEMBULLI 2.

Të shkruhet dhe të lexohet thyesa me

- a) numërues 7 dhe emërues 8 ; b) emërues 6 dhe numërues 15 ;
c) emërues 29 dhe numërues 12 ; ç) me numërues 12 dhe emërues 5 .

! ZGJIDHJE

- a) $\frac{7}{8}$; *shtatë të tetat*; b) $\frac{15}{6}$; *pesëmbëdhjetë të gjashtat*;
c) $\frac{12}{29}$; *dymbëdhjetë të njëzetë e nëntat*; ç) $\frac{12}{5}$; *dymbëdhjetë të pestat*.

Vërejtje. Si njësi (tërësi, e plotë) mund të merren bashkësi të ndryshme (segmenti, sipërfaqja drejt-këndëshe, sipërfaqja katrore, qarku, etj.). Por si njësi mund të merret edhe një bashkësi sendesh ose, më saktësisht, numri i elementeve të saj.

! SHEMBULLI 3.

Të shkruhet dhe të lexohet thyesa me

- a) numërues 7 dhe emërues 8 ; b) emërues 6 dhe numërues 15 ;
c) emërues 29 dhe numërues 12 ; ç) me numërues 12 dhe emërues 5 .

ZGJIDHJE

- a) $\frac{7}{8}$; shtatë të tetat; b) $\frac{15}{6}$; pesëmbëdhjetë të gjashtat;
c) $\frac{12}{29}$; dymbëdhjetë të njëzetë e nëntat; ç) $\frac{12}{5}$; dymbëdhjetë të pestat.

Vërejtje. Si njësi (tërësi, e plotë) mund të merren bashkësi të ndryshme (segmenti, sipërfaqja drejtkëndëshe, sipërfaqja katrore, qarku, etj.). Por si njësi mund të merret edhe një bashkësi sendesh ose, më saktësisht, numri i elementeve të saj.

SHMBOLLI 4.

- a) Në Fig. 3 si njësi (e plotë) është marrë segmenti AB ; si njësi thyesore është marrë segmenti $AC = \frac{1}{6}$ e $AB = (AB : 6)$. Atëherë, segmenti $MN = 5 AC = \frac{5}{6}$ e AB ; pra, segmenti MN është marrë nga segmenti AB duke e ndarë atë në 6 pjesë të barabarta AC dhe duke i marrë 5 pjesë të tilla. D.m.th.

$$MN = (AB : 6) \cdot 5 = AC \cdot 5 = 5 AC.$$

Po ashtu, $EF = 8 AC = \frac{8}{6}$ e $AB = (AB : 6) \cdot 8$, që d.m.th. se EF është fituar duke e ndarë segmentin AB në 6 pjesë të barabarta dhe duke i marrë 8 pjesë të tilla.

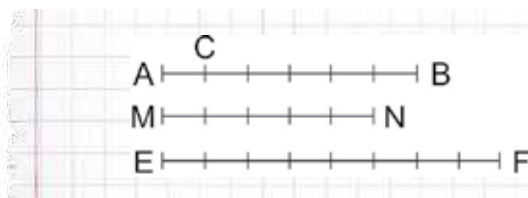


Fig. 3.

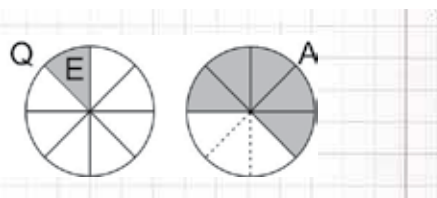


Fig. 4.

- b) Në Fig. 4 si njësi merret qarku Q ; si njësi thyesore është marrë pjesa e hijezuar E e tij që paraqet një të tetën e qarkut Q (sepse Q është ndarë në 8 pjesë të barabarta me E), d.m.th. $E = \frac{1}{8}$ e $Q = (Q : 8)$. Atëherë, sipërfaqja e hijezuar $A = 5 E = \frac{5}{8}$ e $Q = (Q : 8) \cdot 5$, d.m.th., A është fituar duke e ndarë qarkun Q në 8 pjesë dhe duke i marrë 5 pjesë të tilla.

Le të merret si njësi bashkësia A e 27 mollave (më saktësisht, numri 27 i elementeve të saj). Atëherë, $\frac{4}{9}$ e bashkësisë A ose, më saktësisht, $\frac{4}{9}$ e numrit 27 fitohet duke e ndarë numrin 27 në 9 pjesë të barabarta dhe duke i marrë 4 pjesë të tilla, d.m.th.

$$\frac{4}{9} \text{ e } 27 = (27 : 9) + (27 : 9) + (27 : 9) + (27 : 9) = (27 : 9) \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12.$$

Nga shembulli i fundit rrjedh kjo rregull:

Me e gjetë pjesën (thyesën) $\frac{a}{b}$ të një numri (madhësie) c duhet të pjesëtojmë atë numër me emëruesin b dhe, herësin e fituar t'a shumëzojmë me numëruesin a .

$$\text{Pra: } \frac{a}{b} \text{ e } c = (c : b) \cdot a = a \cdot (c : b)$$

! SHEMBULLI 5.

Të gjendet a) $\frac{3}{5}$ e 75; b) $\frac{1}{6}$ e 258; c) $\frac{1}{27}$ e 324;
ç) $\frac{3}{8}$ e 8; d) $\frac{9}{4}$ e 124; dh) $\frac{5}{7}$ e 3087.

! ZGJIDHJE

a) $\frac{3}{5}$ e 75 = $(75 : 5) \cdot 3 = 15 \cdot 3 = 45$;
b) $\frac{1}{6}$ e 258 = $(258 : 6) \cdot 1 = 258 : 6 = 43$; c) $\frac{1}{27}$ e 324 = $324 : 27 = 12$;
ç) $\frac{3}{8}$ e 8 = $(8 : 8) \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$; d) $\frac{9}{4}$ e 124 = $(124 : 4) \cdot 9 = 31 \cdot 9 = 279$;
dh) $\frac{5}{7}$ e 3084 = $(3087 : 7) \cdot 5 = 441 \cdot 5 = 2205$.

! SHEMBULLI 6.

a) Një klasë i ka 39 nxënës. $\frac{2}{3}$ e klasës janë vajza. a) Sa vajza ka ajo klasë? Sa djem i ka ajo klasë?
b) Një repart i fabrikës kishte në plan të prodhonte 540 pjesë këmbimi për një muaj. Dy javët e para punëtorët realizuan $\frac{7}{9}$ e planit. Sa pjesë këmbimi prodhuan punëtorët në dy javët e para? Sa pjesë këmbimi mbetën të prodhohen?
c) Në bibliotekën e një familjeje ndodhen 350 libra. $\frac{3}{5}$ e tyre janë romane, $\frac{2}{7}$ janë libra të histories, kurse të tjerat janë libra të matematikës. Sa romane, sa libra të histories dhe sa libra të matematikës janë në atë bibliotekë?

! ZGJIDHJE

a) Meqë $\frac{2}{3}$ e 39 = $(39 : 3) \cdot 2 = 13 \cdot 2 = 26$, përfundojmë që klasa i ka 26 vajza. Meqë klasa ka 39 nxënës prej të cilëve 26 janë vajza, rrjedh që në klasë janë $39 - 26 = 13$ djemë.
b) $\frac{7}{9}$ e 540 = $(540 : 9) \cdot 7 = 60 \cdot 7 = 420$. Pra, në dy javët e para u prodhuan 420 pjesë këmbimi, kurse kanë mbetë të prodhohen $540 - 420 = 120$ pjesë këmbimi.
c) Meqë $\frac{3}{5}$ e 350 = $(350 : 5) \cdot 3 = 70 \cdot 3 = 210$, përfundojmë që në bibliotekë janë 210 romane.
Meqë $\frac{2}{7}$ e 350 = $(350 : 7) \cdot 2 = 50 \cdot 2 = 100$, prandaj në bibliotekë janë 100 libra të histories.
Romane dhe libra të histories, së bashku, janë $210 + 100 = 310$. Prandaj, në bibliotekë janë $350 - 310 = 40$ libra të matematikës.

2. Disa raste të veçanta të thyesave.

2.1. Thyestat me numërues 0.

Ç'kuptim ka, p.sh. thyesa $\frac{0}{6}$? Thyesa e tillë tregon që një madhësi është ndarë në 6 pjesë të barabarta dhe prej tyre janë marrë 0 pjesë (d.m.th. nuk është marrë asgjë), kështu që $\frac{0}{6} = 0$. Ngjashëm, $\frac{0}{4} = 0$, $\frac{0}{16} = 0$, etj. Prandaj:

Çdo thyesë me numërues 0 dhe emëruesin $b \neq 0$ është e barabartë me 0, d.m.th. $\frac{0}{b} = 0$

2.2. Thyestat me emërues 0.

Ç'kuptim ka, p.sh. thyesa $\frac{8}{0}$? Meqë ndarja e një madhësie në 0 pjesë nuk ka kuptim, nuk ka kuptim as thyesa $\frac{8}{0}$. Kështu,

Thyestat me emërues 0 nuk kanë kuptim.

2.3. Thyestat me emërues 1.

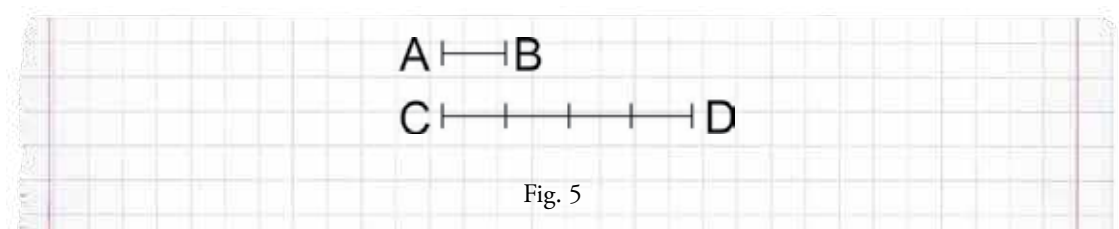


Fig. 5

Ç'kuptim ka, p.sh. thyesa $\frac{4}{1}$? Le të marrim segmentin AB dhe le të shohim se cili është segmenti $CD = \frac{4}{1}$ e AB (shih Fig. 5).

Segmenti CD fitohet duke e ndarë segmentin AB në një pjesë dhe duke i marrë 4 pjesë të tilla, d.m.th. $CD =$

$(AB : 1) \cdot 4 = AB \cdot 4 = 4 \cdot AB$. Pra $\frac{4}{1}$ e $AB = 4 AB$, kështu që $\frac{4}{1} = 4$. Ngjashëm, kemi $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{8}{1} = 8$; $\frac{132}{1} = 132$, etj. Pra,

Thyesa me emërues 1 është e barabartë me numëruesin e saj, d.m.th. $\frac{a}{1} = a$. Ose: Çdo numër i plotë mund të shënohet si thyesë me emërues 1, d.m.th. $a = \frac{a}{1}$

2.4. Thyestat me emërues dhe numërues të barabartë.

Ç'kuptim ka, p.sh. thyesa $\frac{8}{8}$? Kjo thyesë tregon që një madhësi, që është marrë si njësi, është ndarë në 8 pjesë të barabarta dhe janë marrë të 8 pjesët (d.m.th. është marrë e gjithë njësia). Prandaj, $\frac{8}{8} = 1$. Ngjashëm,

$$\frac{15}{15} = 1, \frac{28}{28} = 1, \frac{1459}{1459} = 1, \text{ etj. Rrjedhimisht,}$$

Thyesa që e ka numëruesin e barabartë me emëruesin është e barabartë me 1, d.m.th. $\frac{a}{a} = 1$.

2.5. Thyesa të anasjellta (inverse).

Në Fig. 6 figura A është ndarë në 7 pjesë të barabarta dhe figura B është formuar duke marrë 3 pjesë të tilla. Prandaj,

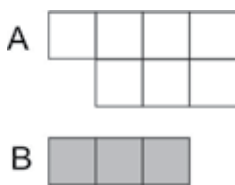


Fig. 6

$$B = \frac{3}{7} \text{ e } A.$$

Nga ana tjetër, figura B është e ndarë në 3 pjesë të barabarta kurse figura A është formuar duke marrë 7 pjesë të tilla, gjë që d.m.th. se

$$A = \frac{7}{3} \text{ e } B.$$

Kështu, $B = \frac{3}{7}$ e A atëherë dhe vetëm atëherë kur $A = \frac{7}{3}$ e B. Edhe në rastin e përgjithshëm, në qoftë se x

dhe y janë dy madhësi të çfarëdoshme kurse $\frac{a}{b}$ një thyesë, vlen:

$y = \frac{a}{b}$ e x atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = \frac{b}{a}$ e y . D.m.th. $y = (x : b) \cdot a$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = (y : a) \cdot b$.

Thyestat $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{b}{a}$ quhen **të anasjellta (inverse)** të njëra tjetrës. Kështu, p.sh. çiftet e thyesave $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ janë të anasjellta me njëra tjetrën. E njëjta gjë vlen p.sh. edhe për thysat $\frac{8}{3}$ e $\frac{3}{8}$.

Meqë $\frac{1}{7} = 7$, përfundojmë që numri i anasjelltë (invers) me numrin 7 është thyesa $\frac{1}{7}$ dhe i anasjellti (inversi) i thyesës $\frac{1}{7}$ është numri 7. Edhe në rastin e përgjithshëm, numri i plotë $a \neq 0$ dhe thyesa $\frac{1}{a}$ janë të anasjelltë (invers) të njëri - tjetrit.

Një zbatim të rregullës së fundit e ilustrojmë në shembullin vijues.

SHMBOLI 7.

- a) Të gjendet numri $\frac{3}{8}$ e të cilit është numri 4095.
- b) Sa ujë nxë një bazen në qoftë se $\frac{2}{3}$ e tij nxënë 3280 litra ?
- c) Një stadium ka 6600 ulëse në të cilat mund të ulen $\frac{5}{7}$ e shikuesve që i nxë ai stadium. Sa shikues i nxë stadiumi ?

ZGJIDHJE

- a) Në qoftë se me x shënojmë numrin e panjohur, atëherë, sipas kushtit të detyrës kemi,

$\frac{3}{8}$ e $x = 4095$, kështu që, sipas rregullës së mësipërme rrjedh që $x = \frac{8}{3}$ e $4095 = (4095 : 3) \cdot 8 = 1365 \cdot 8 = 10920$. Pra, 10920 është numri i kërkuar .

- b) Le të jetë x sasia e ujit (e shprehur në litra) që nxë bazeni. Meqë $\frac{2}{3}$ e bazenit nxë 3280 litra ujë, kemi që $\frac{2}{3}$ e $x = 3280$ kështu që, sipas rregullës së mësipërme, $x = \frac{3}{2}$ e $3280 = (3280 : 2) \cdot 3 = 1640 \cdot 3 = 4920$ Pra, bazeni nxë 4920 litra ujë.

- c) Le të jetë x numri i shikuesve që nxë stadiumi. Meqë $\frac{5}{7}$ e shikuesve mund të ulen në 6600 ulëset e atij stadiumi, përfundojmë që $\frac{5}{7}$ e $x = 6600$, kështu që, sipas rregullës së mësipërme, $x = \frac{7}{5}$ e $6600 = (6600 : 5) \cdot 7 = 1320 \cdot 7 = 9240$. Pra, stadiumi nxë 9240 shikues.

3. Thyesat e barabarta ose thyesat që tregojnë të njëjtën pjesë të një tërësie.

SHMBOLI 8.

Le të marrim si njësi (tërësi) një sipërfaqe drejtkëndëshe A . E ndajmë atë një herë në 4 pjesë të barabarta (Fig. 7 a)), herën tjetër në 8 pjesë të barabarta (Fig. 7 b)) dhe herën e tretë në 16 pjesë të barabarta (Fig. 7 c)).

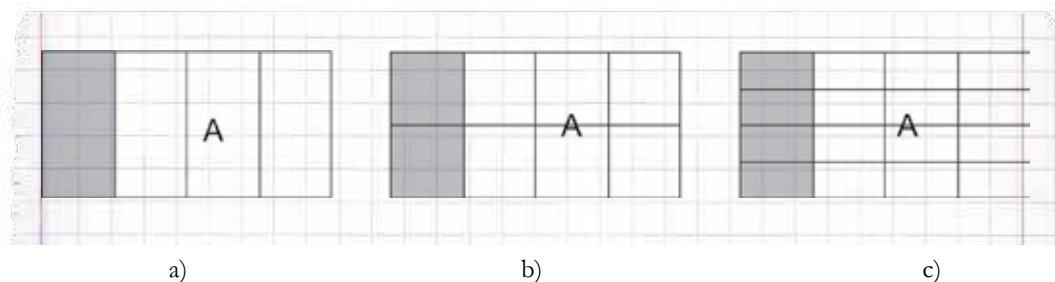


Fig 7.

Pjesët e hijezuara paraqesin në rastin a) $\frac{1}{4}$ e A , në rastin b) $\frac{2}{8}$ e A , në rastin c) $\frac{4}{16}$ e A . Meqë pjesët e hijezuara në të tri rastet paraqesin të njëjtën pjesë të sipërfaqes A , përfundojmë që thyesat e përcaktuara me ato pjesë janë të barabarta, d.m.th.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}.$$

Përgjigjemi në pyetjet vijuese: Si janë fituar thyesat $\frac{2}{8}$ dhe $\frac{4}{16}$ nga thyesa $\frac{1}{4}$? Po thyesat $\frac{2}{8}$ dhe $\frac{1}{4}$ si janë fituar nga thyesa $\frac{4}{16}$?

Përgjigja në pyetjen e parë: Thyesa $\frac{2}{8}$ është fituar nga thyesa $\frac{1}{4}$ duke shumëzuar numëruesin dhe emëruesin e saj me numrin 2 (d.m.th. $\frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{2}{8}$). Po ashtu, thyesa $\frac{4}{16}$ është fituar nga thyesa $\frac{1}{4}$ duke shumëzuar numëruesin dhe emëruesin e saj me numrin 4 (d.m.th. $\frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{4}{16}$).

Përgjigja në pyetjen e dytë: Thyesa $\frac{2}{8}$ është fituar nga thyesa $\frac{4}{16}$ duke pjesëtuar numëruesin dhe emëruesin e saj me numrin 2 (d.m.th. $\frac{4 \div 2}{16 \div 2} = \frac{2}{8}$). Po ashtu, thyesa $\frac{1}{4}$ është fituar nga thyesa $\frac{4}{16}$ duke pjesëtuar numëruesin dhe emëruesin e saj me numrin 4 (d.m.th. $\frac{4 \div 4}{16 \div 4} = \frac{1}{4}$).

Shembulli i mësipërm e ilustron këto dy rregulla:

Për të formuar thyesa të barabarta me një thyesë të dhënë, shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin me të njëjtin numër të ndryshëm nga 0. Me fjalë të tjera, thyesa nuk ndryshon nëse numëruesin edhe emëruesin e saj e shumëzojmë me të njëjtin numër të ndryshëm nga 0. Pra, nëse $c \neq 0$, atëherë $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$. Themi, po ashtu, që thyesa $\frac{a}{b}$ është zgjeruar me numrin c .

Për të formuar thyesa të barabarta me një thyesë të dhënë, pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me të njëjtin numër të ndryshëm nga 0. Me fjalë të tjera, thyesa nuk ndryshon nëse numëruesin edhe emëruesin e saj e pjesëtojmë me të njëjtin numër të ndryshëm nga 0. Pra, nëse $c \neq 0$, atëherë $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$. Themi, po ashtu, që thyesa $\frac{a}{b}$ është thjeshtuar me numrin c .

Veprimi i shumëzimit të numëruesit dhe emëruesit të një thyese me të njëjtin numër të ndryshëm nga zero quhet zgjerim i asaj thyese. Ndërkaq, veprimi i pjesëtimit të numëruesit dhe emëruesit të një thyese me të njëjtin numër të ndryshëm nga zero quhet thjeshtim i asaj thyese. (Thyesa quhet e pathjeshtueshme në qoftë se numëruesi dhe emëruesi i saj nuk plotëpjesëtohen me asnjë numër të njëjtë të ndryshëm nga 1). Që të thjeshtojmë një thyesë, numëruesin dhe emëruesin e saj i shprehim si prodhime të faktorëve të tyre dhe pastaj i thjeshtojmë faktorët e përbashkët (të njëjtë) të numëruesit dhe emëruesit.

Duke pasur parasysh dy rregullat e mësipërme, përfundojmë që *gjatë zgjerimit dhe thjeshtimit të një thyese vlera e saj nuk ndryshon.*

SHEMBULLI 9.

a) Meqë $\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$, $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$, $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$, $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6} = \frac{10}{18}$, ... përfundojmë që $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{18} = \dots$

(Themi që thyesat $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{18}$ janë fituar me *zgerimin* e thyesës $\frac{2}{3}$ me numrat 2, 3, 4, 5, ..., përkatësisht).

b) Meqë $\frac{30 \cdot 2}{42 \cdot 2} = \frac{15}{21}$, $\frac{30 \cdot 3}{42 \cdot 3} = \frac{10}{14}$, $\frac{30 \cdot 6}{42 \cdot 6} = \frac{5}{7}$ përfundojmë që $\frac{30}{42} = \frac{15}{21} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$. (Themi që thyesat $\frac{15}{21}$, $\frac{10}{14}$, $\frac{5}{7}$ janë marrë me *thjeshtimin* e thyesës $\frac{30}{42}$ me numrat 2, 3 dhe 6, përkatësisht.).

c) Thjeshtojmë thyesën $\frac{1320}{2040}$. Meqë $1320 = 132 \cdot 10 = 4 \cdot 33 \cdot 10 = 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 10 = 3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 11$ dhe $2040 = 204 \cdot 10 = 4 \cdot 51 \cdot 10 = 4 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 10$, përfundojmë që

$$\frac{1320}{2040} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 11}{3 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 17} = \frac{11}{17}.$$

Vlen edhe kjo rregull e thjeshtë për barazimin e dy thyesave:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ atëherë dhe vetëm atëherë kur } a \cdot d = b \cdot c.$$

SHEMBULLI 10.

A janë të barabarta thyesat

a) $\frac{24}{31}$ dhe $\frac{120}{155}$? b) $\frac{32}{19}$ dhe $\frac{17}{14}$?

$\frac{24}{31} = \frac{120}{155}$ sepse: $\frac{24}{31} = \frac{24 \cdot 5}{31 \cdot 5} = \frac{120}{155}$; ose: $\frac{120}{155} = \frac{120 : 5}{155 : 5} = \frac{24}{31}$; ose: $24 \cdot 155 = 3720 = 31 \cdot 120$.

b) $\frac{32}{19} \neq \frac{17}{14}$ sepse $32 \cdot 14 = 448 \neq 323 = 19 \cdot 17$.

SHEMBULLI 11.

Të gjendet numri i panjohur x i tillë që:

a) $\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$; b) $\frac{x}{5} = \frac{4}{10}$; c) $\frac{5}{x} = \frac{30}{36}$; d) $\frac{15}{25} = \frac{x}{5}$; e) $\frac{84}{91} = \frac{12}{x}$.

! ZGJIDHJE

a) Nga $\frac{2}{3} = \frac{x}{9} = \frac{x:3}{9:3} = \frac{x:3}{3}$ d.m.th. nga $\frac{2}{3} = \frac{x:3}{3}$ rrjedh që

$x : 3 = 2$. Meqë këtua x është i pjesëtueshmi, 3 pjesëtuesi dhe 2 herësi dhe meqë

i pjesëtueshmi $x = (\text{herësi}) \cdot (\text{pjesëtuesi})$, përfundojmë që $x = 2 \cdot 3 = 6$. Pra, $x = 6$.

Ose: nga $\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$ rrjedh që $2 \cdot 9 = 3x$ d.m.th. $3x = 18$. Këtua, njëri faktor është numri 3, faktori tjetër është x dhe prodhimi është 18. Kështu nga barazimi

(njëri faktor) = (prodhimi) : (faktori tjetër) rrjedh që $x = 18 : 3$, d.m.th. $x = 6$.

b) Nga $\frac{x}{5} = \frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5}$, d.m.th. nga $\frac{x}{5} = \frac{2}{5}$ rrjedh që $x = 2$.

Ose: nga $\frac{x}{5} = \frac{4}{10}$ rrjedh që $x \cdot 10 = 5 \cdot 4$, d.m.th. $10x = 20$, prej nga $x = 20 : 10 = 2$.

c) Nga $\frac{5}{x} = \frac{30}{36} = \frac{30:6}{36:6} = \frac{5}{6}$, d.m.th. nga $\frac{5}{x} = \frac{5}{6}$ rrjedh që $x = 6$.

Ose: nga $\frac{5}{x} = \frac{30}{36}$ rrjedh $5 \cdot 36 = x \cdot 30$ d.m.th. $30x = 180$, kështu që $x = 180 : 30 = 6$.

Ngjashëm zgjidhen edhe detyrat c) dhe d).

! SHEMBULLI 12.

a) Sa të tetat i ka një gjysmë?

b) Sa të nëntat i ka një e treta?

c) Sa të dymbëdhjetat i ka një çerek? ç) Sa $\frac{1}{5}$ ka në $\frac{17}{5}$?

d) Sa $\frac{2}{3}$ ka në 10 të plota?

! ZGJIDHJE

a) Meqë një gjysmë $= \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$, përfundojmë që një gjysmë i ka katër të tetat.

b) Meqë $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$, përfundojmë që një e treta i ka tri të nëntat.

c) Meqë $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$, përfundojmë që një çerek i ka tri të dymbëdhjetat.

ç) Në $\frac{17}{5}$ janë shtatëmbëdhjetë $\frac{1}{5}$.

d) Meqë $10 = \frac{30}{3} = \frac{15 \cdot 2}{3}$ përfundojmë që në 10 të plota ka pesëmbëdhjetë $\frac{2}{3}$.

4. Krahasimi i thyesave. Disa lloje të thyesave.

Krahasimi i thyesave me njësinë (të plotën).

Thyesat e barabarta me 1, më të vogla se 1 dhe më të mëdha se 1.

Le të marrim për njësi sipërfaqen katërkëndëshe A , d.m.th. konsiderojmë se syprina e

saj është e barabartë me 1 njësi matëse. E ndajmë atë në 6 pjesë të barabarta. Le të jenë B, C, D sipërfaqet e hijezuara në figurën 8 a), b) dhe c).

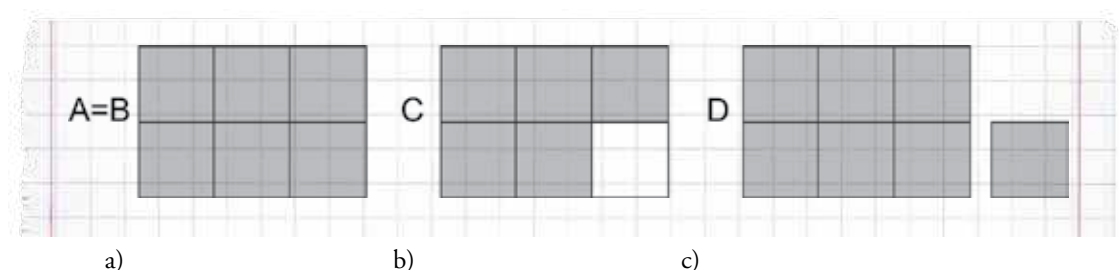


Fig. 8

Atëherë pjesët e hijezuara të sipërfaqes katërkëndëshe të paraqitura në Fig. 8, a) , b), c), janë të paraqitura me

thyesat $B = \frac{6}{6}$ e A , $C = \frac{5}{6}$ e A dhe $D = \frac{7}{6}$ e A . Meqë syprina e sipërfaqës A është 1 njësi, syprina e sipërfaqës

C është *më e vogël* se 1 njësi dhe syprina e sipërfaqës D është *më e madhe* se 1 njësi, përfundojmë që

$$\frac{6}{6} = 1, \quad \frac{5}{6} < 1, \quad \frac{7}{6} > 1$$

Vërejmë që në thyenë $\frac{6}{6}$ numëruesi është *i barabartë* me emëruesin; në thyenë $\frac{5}{6}$ numëruesi është *më i vogël* se emëruesi, kurse në thyenë $\frac{7}{6}$ numëruesi është *më i madh* se emëruesi. Prandaj, përfundojmë që:

- | | |
|--|------------------------|
| 1. Një thyesë është e barabartë me 1, nëse e ka numëruesin e barabartë me emëruesin, d.m.th. $a = b$, ($b \neq 0$). | $\frac{a}{b} = 1$ nëse |
| 2. Një thyesë është më e vogël se 1, nëse e ka numëruesin më të vogël se emëruesin, d.m.th. nëse $a < b$, ($b \neq 0$). | $\frac{a}{b} < 1$ |
| 3. Një thyesë është më e madhe se 1, nëse e ka numëruesin më të madh se emëruesin, d.m.th. $a > b$, ($b \neq 0$). | $\frac{a}{b} > 1$ nëse |

Thyesat më të vogla se 1, d.m.th. thyestat numëruesi i të cilave është më i vogël se emëruesi quhen **thyesa të**

thjeshta (ose **të rregullta**). Të tilla janë, p.sh. thyestat $\frac{3}{5}, \frac{7}{13}, \frac{37}{53}, \frac{1765}{12548}$, etj.

Thyesat më të mëdha se 1, d.m.th. thyestat numëruesi i të cilave është më i madh se emëruesi quhen **thyesa të**

pathjeshta (ose **të parregullta**). Të tilla janë, p.sh. thyestat $\frac{7}{5}, \frac{17}{11}, \frac{37}{3}, \frac{176}{125}$, etj.

! SHEMBULLI 13.

Në vend të ? të vëhet shenja =, < ose > :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{21}{21} ? 1; \quad \text{b)} \quad \frac{36}{36} ? 1 ? \frac{127}{127}; \quad \text{c)} \quad \frac{32}{52} ? 1; \quad \text{ç)} \quad \frac{16}{11} ? 1; \quad \text{d)} \quad 1 ? \frac{452}{175}; \quad \text{dh)} \quad 1 ? \frac{89}{329}; \\ \text{e)} \quad \frac{a}{a} ? \frac{b}{b}; \quad \text{f)} \quad \frac{10}{3} ? 1 ? \frac{135}{276}; \quad \text{g)} \quad \frac{1435}{4532} ? 1 ? \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

(Përgjigjet: **a)** =; **b)** =, =; **c)** <; **ç)** >; **d)** <; **dh)** >; **e)** =; **f)** >, >; **g)** <, <).

! SHEMBULLI 14.

Në qoftë se $A = \left\{ \frac{4}{3}, \frac{12}{12}, \frac{1}{2}, \frac{12}{7}, \frac{19}{15}, \frac{5}{17}, \frac{11}{11}, \frac{125}{254}, \frac{347}{347}, \frac{1251}{1250} \right\}$ të gjenden këto nënbashkësi të

bashkësisë A : $B = \{x \in A \mid x < 1\}$, $C = \{x \in A \mid x = 1\}$ dhe $D = \{x \in A \mid x > 1\}$.

! ZGJIDHJE

$$B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{17}, \frac{125}{254} \right\}, \quad C = \left\{ \frac{12}{12}, \frac{11}{11}, \frac{347}{347} \right\}, \quad D = \left\{ \frac{4}{3}, \frac{12}{7}, \frac{19}{15}, \frac{1251}{1250} \right\}.$$

4.2. Numrat e përzier (për ata që duan të dinë më shumë).

Le të marrim për njësi (të plotë) sipërfaqen drejtkëndëshe A . E ndajmë atë në 5 pjesë të barabarta dhe i mar-

rim 13 pjesë të tilla. Me këtë është përcaktuar thyesa $\frac{13}{5}$. Siç shihet nga Fig. 9 nga këto pjesë janë formuar 2

njësi (të plota) dhe kanë mbetur tri të pestat. Këtë fakt e shënojmë me $2\frac{3}{5}$ dhe ai paraqet numrin **dy e tri të pestat**. Numrat e tillë i quajmë **numra të përzier** ose **thyesa të përziera** (sepse ata përbëhen prej një numri të

plotë dhe prej një thyese të thjeshtë). 2 quhet **pjesa e plotë** kurse $\frac{3}{5}$ quhet **pjesa thyesore** e numrit të përzier $2\frac{3}{5}$.



Fig. 9.

Nga sa u vërejt më sipër, thyesa e pathjeshtë $\frac{13}{5}$ është e barabartë me numrin e përzier $2\frac{3}{5}$, d.m.th. $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.

Kështu, **çdo thyesë e pathjeshtë mund të shndërrohet në numër të përzier**. Si bëhet kjo? Siç vërehet nga shembulli i mësipërm, duke pjesëtuar numëruesin 13 me emëruesin 5 fitohen 2 njësi (të plota) dhe mbeten

3 të pestat, d.m.th.

$$\frac{13}{5} = 13 : 5 = 2 \text{ dhe mbetet } 3 \text{ (për t'u pjesëtuar me } 5) = 2\frac{3}{5}$$

Ngjashëm,

$$\frac{258}{17} = 258 : 17 = 15 \text{ dhe mbetet } 4 \text{ (për t'u pjesëtuar me } 17) = 15\frac{4}{17}.$$

Pra,

Thyesa e pathjeshtë është e barabartë me numrin e përzier pjesa e plotë e të cilit është herësi i pjesëtimit të numëruesit me emëruesin e asaj thyese kurse pjesa thyesore e tij është thyesa që për numërues ka mbetjen e pjesëtimit kurse për emërues ka emëruesin e thyesës së dhënë.

SHËMBULLI 15.

Thyesat e pathjeshta a) $\frac{77}{25}$; b) $\frac{179}{38}$; c) $\frac{1571}{29}$; të shndërrohen në numra të përzier.

ZGJIDHJE

- a) $\frac{77}{25} = 77 : 25 = 3 \text{ dhe mbetet } 2 \text{ (për t'u pjesëtuar me } 25) = 3\frac{2}{25}$;
 b) $\frac{179}{38} = 179 : 38 = 4 \text{ dhe mbetet } 27 \text{ (për t'u pjesëtuar me } 38) = 4\frac{27}{38}$;
 c) $\frac{1571}{29} = 1571 : 29 = 54 \text{ dhe mbetet } 5 \text{ (për t'u pjesëtuar me } 29) = 54\frac{5}{29}$.

Nga sa u vërejt më sipër *çdo thyesë është pjesëtim (me mbetje) i numëruesit me emëruesin e saj*, d.m.th. vlen

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Kështu p.sh. $\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$; $\frac{9}{3} = 9 : 3 = 3$; $\frac{18}{6} = 18 : 6 = 3$;

$\frac{17}{3} = 17 : 3 = 5 \text{ dhe teprojnë } 2 \text{ (për t'u pjesëtuar me } 3) = 5\frac{2}{3}$; $\frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$; $\frac{137}{12} = 11\frac{5}{12}$

Por, edhe $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0 \text{ dhe mbetet } 3 \text{ (për t'u pjesëtuar me } 4)$.

Bëhet pyetja: Si shndërrohet numri i përzier në thyesë të pathjeshtë?

Meqë siç pamë më sipër, p.sh. ishte $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ dhe meqë $\frac{13}{5} = \frac{5 \cdot 2 + 3}{5}$, përfundojmë që $2\frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 2 + 3}{5}$.

Nga këtu nxjerrim këtë rregull:

$$c \frac{a}{b} = \frac{b \cdot c + a}{b}$$

! SHEMBULLI 16.

Numrat e përzier a) $7\frac{5}{8}$; b) $15\frac{12}{17}$; c) $6\frac{125}{232}$; të shndërrohen në thyesa të pathjeshta.

! ZGJIDHJE

a) $7\frac{5}{8} = \frac{8 \cdot 7 + 5}{8} = \frac{56 + 5}{8} = \frac{61}{8}$;

b) $15\frac{12}{17} = \frac{17 \cdot 15 + 12}{17} = \frac{255 + 12}{17} = \frac{267}{17}$;

c) $6\frac{125}{232} = \frac{232 \cdot 6 + 125}{232} = \frac{1392 + 125}{232} = \frac{1517}{232}$.

4.3. Krahësimi i thyesave me emërues të njëjtë si dhe i thyesave me numërues të njëjtë.

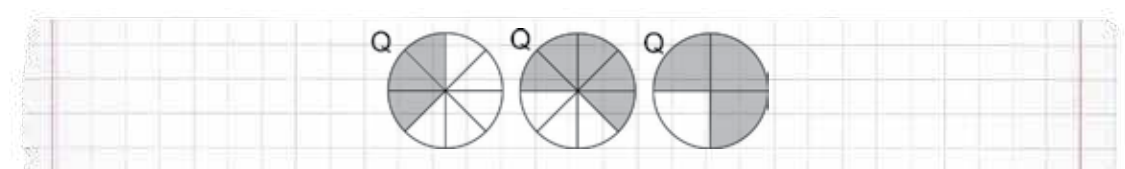


Fig. 10

Le të marrim për njësi qarkun Q dhe e ndajmë atë në 8 pjesë të barabarta. Sipërfaqja e hijezuar

në Fig. 10 a) është sa $\frac{3}{8}$ e Q kurse sipërfaqja e hijezuar në Fig. 10 b) është sa $\frac{5}{8}$ e Q .

Shihet qartë që syprina e sipërfaqes së hijezuar në Fig 10 a) është më e vogël se syprina e sipërfaqes së hijezuar

në Fig. 10 b). Prandaj : $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$. Vërejmë që këto dy thyesa i kanë emëruesit e njëjtë kurse numëruesi i të parës është më i vogël se numëruesi i thyesës së dytë. Prej këtu nxjerrim këtë rregull:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a < c$. d.mth. Prej dy thyesave me emërues të njëjtë më e vogël (më e madhe) është ajo që e ka numëruesin më të vogël (më të madh).

Në figurën 10 a) është vizatuar qarku Q dhe është i ndarë në 8 pjesë të barabarta, prej të cilave janë hijezuar 3 pjesë, kurse në Fig. 10 ç) qarku Q është ndarë në 4 pjesë të barabarta dhe janë hijezuar 3 prej tyre. Syprina e sipërfaqes së hijezuar në Fig 10 a) paraqet $\frac{3}{8}$ e Q kurse ajo në Fig. 10 c) paraqet $\frac{3}{4}$ e Q . Meqë sipërfaqja e

hijezuar në Fig. 10 a) është më e vogël se ajo në Fig. 10 c), përfundojmë që $\frac{3}{8} < \frac{3}{4}$.

Këto dy thyesa i kanë numërueset e njëjtë kurse emëruesi i të parës është më i madh se emëruesi i thyesës së dytë. Prandaj, përfundojmë që:

$\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $b > c$. d.m.th. prej dy thyesave me numërues të njëjtë më e vogël (më e madhe) është ajo që e ka emëruesin më të madh (më të vogël)

SHEMBULLI 17.

Thyesat a) $\frac{3}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}, \frac{12}{8}, \frac{10}{8}, \frac{9}{8}$; b) $\frac{7}{5}, \frac{7}{8}, \frac{7}{4}, \frac{7}{10}, \frac{7}{2}, \frac{7}{9}, \frac{7}{12}$ të renditen 1) duke filluar nga më e vogla deri te më e madhja; 2) duke filluar nga më e madhja deri te më e vogla dhe secila nga to të krahasohet me numrin 1.

ZGJIDHJE

- a) 1. $\frac{1}{8} < \frac{3}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8} < 1 < \frac{9}{8} < \frac{10}{8} < \frac{12}{8}$; 2. $\frac{12}{8} > \frac{10}{8} > \frac{9}{8} > 1 > \frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{3}{8} > \frac{1}{8}$;
b) 1. $\frac{7}{12} < \frac{7}{10} < \frac{7}{9} < \frac{7}{8} < 1 < \frac{7}{5} < \frac{7}{4} < \frac{7}{2}$; 2. $\frac{7}{2} > \frac{7}{4} > \frac{7}{5} > 1 > \frac{7}{8} > \frac{7}{9} > \frac{7}{10} > \frac{7}{12}$.

4.4. Krahasimi i thyesave me emërues të ndryshëm.

Që të krahasojmë dy (ose më shumë) thyesa me emërues të ndryshëm, së pari i shndërrojmë ato në thyesa (të barabarta me to) me emërues të njëjtë, e pastaj i krahasojmë ato sipas rregullës së krahasimit të thyesave me emërues të njëjtë.

Si bëhet shndërrimi i thyesave në thyesa me emërues të njëjtë?

Së pari gjejmë shmv të emëruesve të thyesave të dhëna dhe, pastaj, secilën thyesë e zgjerojmë me herësin e shmv dhe emëruesit të asaj thyese.

E ilustruojmë këtë ecure me shembujt vijues.

SHEMBULLI 18.

Të krahasohen thyesat $\frac{4}{7}, \frac{5}{6}$ dhe $\frac{9}{14}$.

! ZGJIDHJE

Së pari thyesat e dhëna i shndërrojmë në thyesa me emërues të njëjtë.

Për këtë qëllim gjejmë shmv të emëruesëve 6, 7, 14 të thyesave të dhëna. Meqë 7 është faktor i 14 kemi $shmv(6, 7, 14) = shmv(6, 14)$. Zbërthejmë në faktorë të thjeshtë numrat 6 dhe 14. Kemi:

6	14	2
3	7	3
1	7	7
1	1	

Prandaj, $shmv(6, 7, 14) = shmv(6, 14) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

Shmv 42 e pjesëtojmë me emëruesin 7 të thyesës $\frac{4}{7}$; $42 : 7 = 6$; thyesën $\frac{4}{7}$ e zgjero-

jmë me herësin 6 dhe fitojmë $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 7} = \frac{24}{42}$, d.m.th. $\frac{4}{7} = \frac{24}{42}$.

Shmv 42 e pjesëtojmë me emëruesin 6 të thyesës $\frac{5}{6}$; $42 : 6 = 7$; thyesën $\frac{5}{6}$ e zgjerojmë me herësin 7 dhe

fitojmë $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42}$, d.m.th. $\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$.

Shmv 42 e pjesëtojmë me emëruesin 14 të thyesës $\frac{9}{14}$; $42 : 14 = 3$; thyesën $\frac{9}{14}$ e zgjerojmë me herësin

3 dhe fitojmë $\frac{9}{14} = \frac{9 \cdot 3}{14 \cdot 3} = \frac{27}{42}$, d.m.th. $\frac{9}{14} = \frac{27}{42}$.

Kështu gjetëm që: $\frac{4}{7} = \frac{24}{42}$; $\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$ dhe $\frac{9}{14} = \frac{27}{42}$.

Sipas rregullës së krahasimit të thyesave me emërues të njëjtë kemi :

$\frac{24}{42} < \frac{27}{42} < \frac{35}{42}$ kështu që $\frac{4}{7} < \frac{9}{14} < \frac{5}{6}$.

! SHEMBULLI 19. (PËR ATA QË DUAN TË DINE MË SHUMË).

Një piceri italiane prodhon tri lloje picash: të vogla të mesme dhe të mëdha. Të gjitha picat e kanë formën e qarkut (sipërfaqes rrethore). Picat e vogla e kanë diametrin 10 cm, picat e mesme janë me diametër 12 cm kurse të mëdhatë e kanë diametrin 16 cm. Një picë e vogël kushton 6 euro, një picë e mesme kushton 9 euro, kurse një picë e madhe kushton 12 euro. Cili nga llojet e picave kushton më së liri, e cila më së shtrenjti?

! SHEMBULLI 20.

Të krahasohen thyesat $\frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{6}$

Zgjidhje. Thyesat e dhëna i shndërrojmë në thyesa me emërues të njëjtë. Gjejmë shmv të emëruesëve 3, 4, 5, 6, 12. Meqë 3, 4, 6 janë faktorë të 12, përfundojmë që $shmv(3, 4, 5, 6, 12) = shmv(5, 12)$. Meqë 5 dhe 12 janë numra relativisht të thjeshtë, përfundojmë që $shmv(5, 12) = 5 \cdot 12 = 60$. Pra, $shmv(3, 4, 5, 6, 12) = shmv(5, 12) = 60$.

Herësi i *shmv* (= 60) dhe i emëruesit 5 të thyesës $\frac{3}{5}$ është $60 : 5 = 12$. Prandaj, thyesën $\frac{3}{5}$ e zgjerojmë me 12

dhe fitojmë $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{36}{60}$, d.m.th. $\frac{3}{5} = \frac{36}{60}$.

Herësi i *shmv* (= 60) dhe i emëruesit 3 të thyesës $\frac{4}{3}$ është $60 : 3 = 20$. Prandaj, thyesën $\frac{4}{3}$ e zgjerojmë me 20

dhe fitojmë $\frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{80}{60}$, d.m.th. $\frac{4}{3} = \frac{80}{60}$.

Herësi i *shmv* (= 60) dhe i emëruesit 4 të thyesës $\frac{3}{4}$ është $60 : 4 = 15$. Prandaj, thyesën $\frac{3}{4}$ e zgjerojmë me 15

dhe fitojmë $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{45}{60}$, d.m.th. $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$.

Herësi i *shmv* (= 60) dhe i emëruesit 12 të thyesës $\frac{5}{12}$ është $60 : 12 = 5$. Prandaj, thyesën $\frac{5}{12}$ e zgjerojmë me

5 dhe fitojmë $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{25}{60}$, d.m.th. $\frac{5}{12} = \frac{25}{60}$.

Herësi i *shmv* (= 60) dhe i emëruesit 6 të thyesës $\frac{7}{6}$ është $60 : 6 = 10$. Prandaj, thyesën $\frac{7}{6}$ e zgjerojmë me 10

dhe fitojmë $\frac{7}{6} = \frac{7 \cdot 10}{6 \cdot 10} = \frac{70}{60}$, d.m.th. $\frac{7}{6} = \frac{70}{60}$.

Kështu, thyesat e dhëna i shndërrojmë në thyesa me emërues të njëjtë;

$$\frac{3}{5} = \frac{36}{60}; \frac{4}{3} = \frac{80}{60}; \frac{3}{4} = \frac{45}{60}; \frac{5}{12} = \frac{25}{60} \text{ dhe } \frac{7}{6} = \frac{70}{60}.$$

Tash meqë, sipas rregullës së krahasimit të thyesave me emërues të njëjtë, kemi:

$$\frac{25}{60} < \frac{36}{60} < \frac{45}{60} < \frac{70}{60} < \frac{80}{60} \text{ përfundojmë që } \frac{5}{12} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4} < \frac{7}{6} < \frac{4}{3}.$$

! ZGJIDHJE

Meqë rrezet e picave të vogla, të mesme dhe të mëdha janë, përkatësisht, $r = \frac{10}{2} \text{ cm}$, $r = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$ dhe $r =$

$\frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$, përfundojmë se syprina e një pice të

a) vogël është $S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25 \pi \text{ cm}^2$;

b) mesme është $S_2 = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36 \pi \text{ cm}^2$;

c) madhe është $S_3 = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64 \pi \text{ cm}^2$.

Prandaj, çmimi i $\pi \text{ cm}^2$ të një pice të

a) vogël është $\frac{6}{25}$ euro;

b) mesme është $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ euro;

c) të madhe është $\frac{12}{64} = \frac{3}{16}$ euro.

I krahasojmë thyesat $\frac{6}{25}$, $\frac{1}{4}$ dhe $\frac{3}{16}$. Meqë $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} < \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ dhe $\frac{3}{16} < \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, përfundojmë që $\frac{6}{25} < \frac{1}{4}$ dhe

$\frac{3}{16} < \frac{1}{4}$. Po ashtu, meqë $\frac{3}{16} < \frac{6}{25}$ (sepse $3 \cdot 25 = 75 < 96 = 6 \cdot 16$), përfundojmë që $\frac{3}{16} < \frac{6}{25} < \frac{1}{4}$.

Përgjigja: Pica e madhe kushton më së liri, kurse pica e mesme kushton më së shtrenjti.

5. Veprimet me thyesa

5.1 Mbledhja dhe zbritja e thyesave.

5.1.1. Mbledhja dhe zbritja e thyesave me emërues të njëjtë.

Thyesat me emërues të njëjtë mbledhen (zbriten) duke i mbledhur (zbritur) numëruesit tyre, kurse emëruesi i njëjtë përkrahëhet. D.m.th.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{dhe} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Të theksojmë që, ngjashëm sikurse te veprimet përkatëse me numra natyrorë, veprimi i mbledhjes çdo dy thyesave ia shoqëron një thyesë të tretë; ndërkohë *veprimi i zbritjes së thyesave është i mundshëm* (në bashkësinë e thyesave jonegative) *vetëm në rastin kur i zbritëshmi është më i madh se zbritësi*. Po ashtu, për veprimin e mbledhjes dhe zbritjes së thyesave vlejnë vetitë e njëjta me ato të mbledhjes dhe zbritjes së numrave natyrorë.

❗ SHEMBULLI 21.

a) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$; b) $\frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{5+4}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{14} + \frac{5}{14} + \frac{4}{14} = \frac{3+5+4}{14} = \frac{12}{14}$; ç) $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$;

d) $\frac{23}{32} - \frac{15}{32} = \frac{23-15}{32} = \frac{8}{32}$; dh) $\frac{17}{16} - \frac{4}{16} = \frac{17-4}{16} = \frac{13}{16}$;

e) Ndryshimi $\frac{3}{7} - \frac{5}{7}$ nuk është i mundshëm sepse $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$.

f) Cilat thyesa i plotësojnë thyesat e thjeshta $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{3}{10}$ deri te një e plotë? Pse? (*Përgjigja:*

$\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}$ dhe $\frac{7}{10}$ përkatësisht, sepse: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$, $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = \frac{7}{7} = 1$ dhe $\frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{10}{10} = 1$).

Numri i plotë dhe thyesa mbledhen (zbriten) duke shkruar së pari numrin e plotë si thyes me emërues sa emëruesi i mbledhorit tjetër thyesor dhe, pastaj, mbledhen (zbriten) thyesat me emërues të përbashkët.

SHMBOLI 22.

$$\text{a)} \quad 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8+3}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4};$$

$$\text{b)} \quad \frac{3}{5} + 4 = \frac{3}{5} + \frac{20}{5} = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5}; \quad \text{c)} \quad 3 - \frac{3}{4} = \frac{12}{4} - \frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{ç)} \quad \frac{7}{2} - 3 = \frac{7}{2} - \frac{6}{2} = \frac{7-6}{2} = \frac{1}{2}; \quad \text{d)} \quad \text{Ndryshimi } \frac{3}{4} - 3 \text{ nuk është i mundshëm sepse } \frac{3}{4} < \frac{12}{4} = 3.$$

$$\text{dh)} \quad \frac{3}{14} + \frac{6}{14} - \frac{5}{14} + \frac{4}{14} = \frac{3+6-5+4}{14} = \frac{9-5+4-4}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

Vërejtje: Nga shembulli i mësipërm vërejmë që *shuma e një numri të plotë dhe e një thyese të thjeshtë është e barabartë me numrin e përzier që për pjesë të plotë ka mbledhorin e plotë kurse për pjesë thyesore ka mbledhorin thyesor dhe anasjelltas, çdo numër i përzier mund të shkruhet si shumë e pjesës së plotë të tij*

me pjesën thyesore të tij. Me fjalë të tjera: $a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$. Kështu, p.sh. $3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$; $4 + \frac{5}{7} = 4\frac{5}{7}$.

Mbledhja e dy (os më shumë) numrave të përzier (që pjesët thyesore i kanë thyesa me emërues të njëjtë) bëhet në dy mënyra:

1. *duke i shndërruar numrat e përzier në thyesa të pathjeshta (me emërues të njëjtë) e pastaj duke i mbledhur ato dhe, në fund, shumën e fituar e kthejmë në numër të përzier.*

2. *Duke i shndërruar ata si shuma të pjesëve të plota dhe pjesëve thyesore të tyre (shih Vërejtjen e mësipërme) dhe pastaj duke mbledhur pjesët e plota me pjesët e plota dhe pjesët thyesore me pjesët thyesore të tyre.*

SHMBOLI 23.

Numrat e përzier të mbledhen në dy mënyra:

$$\text{a)} \quad 1. \quad 2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5} = \frac{5 \cdot 2 + 1}{5} + \frac{5 \cdot 3 + 2}{5} = \frac{11}{5} + \frac{17}{5} = \frac{11+17}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5};$$

$$2. \quad 2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{5} = 2 + \frac{1}{5} + 3 + \frac{2}{5} = (2+3) + (\frac{1}{5} + \frac{2}{5}) = 5 + \frac{3}{5} = 5\frac{3}{5}.$$

$$\text{b)} \quad 1. \quad 4\frac{2}{7} + 5\frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 4 + 2}{7} + \frac{7 \cdot 5 + 4}{7} = \frac{30}{7} + \frac{39}{7} = \frac{30+39}{7} = \frac{69}{7} = 9\frac{6}{7};$$

$$2. \quad 4\frac{2}{7} + 5\frac{4}{7} = (4+5) + (\frac{2}{7} + \frac{4}{7}) = 9 + \frac{6}{7} = 9\frac{6}{7}.$$

$$3. \quad 5\frac{4}{7} + 3\frac{5}{7} = (5+3) + (\frac{4}{7} + \frac{5}{7}) = 8 + \frac{9}{7} = 8 + 1\frac{2}{7} = 8 + 1 + \frac{2}{7} = 9 + \frac{2}{7} = 9\frac{2}{7}.$$

Numrat e përzier zbriten duke i shndërruar ata, së pari, në thyesa të pathjeshta e pastaj duke i zbritur ato dhe, në fund, ndryshimin e fituar e shndërrojmë në numër të përzier.

! SHEMBULLI 24.

Të gjendet ndryshimi i numrave të përzier:

a) 1. $5\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 5 + 3}{4} - \frac{4 \cdot 3 + 1}{4} = \frac{23}{4} - \frac{13}{4} = \frac{23-13}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2}$

2. $5\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4} = \left(5 + \frac{3}{4}\right) - \left(3 + \frac{1}{4}\right) = (5-3) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2 + \frac{2}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2}$

b) $7\frac{2}{5} - 3\frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 7 + 2}{5} - \frac{5 \cdot 3 + 4}{5} = \frac{37}{5} - \frac{19}{5} = \frac{37-19}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$

Kujdes! Dy numra të përzier nuk mund të zbriten gjithmonë, sipas mënyrës së dytë të zbritjes së numrave të përzier, d.m.th. duke zbritur pjesët e plotat me pjesët e plotat dhe pjesët thyesore me pjesët thyesore të tyre (siç është vepruar në mënyrën e dytë të zgjidhjes së shembullit nën a)). Provo p.sh. të veprosh ashtu në rastin b) të shembullit të mësipërm!

5.1.2. Mbledhja dhe zbritja e thyesave me emërues të ndryshëm.

Mbledhja (zbritja) e thyesave me emërues të ndryshëm bëhet duke i shndërruar ato, së pari, në thyesa me emërues të njëjtë, e pastaj duke i mbledhur (zbritur) thyesat e tilla.

! SHEMBULLI 25.

Të kryhen veprimet : a) $\frac{7}{12} + \frac{5}{18} + \frac{4}{9}$; b) $\frac{7}{6} - \frac{3}{8}$ c) $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} + \frac{1}{3}$.

! ZGJIDHJE

a) Së pari thyesat e dhëna i shndërrojmë në thyesa me emërues të njëjtë. Gjejmë *shmvp* (12, 18, 9). Meqë 18 plotpjesëtohet me 9 vlen *shmvp*(12, 18, 9) = *shmvp* (12, 18). Numrat 12 dhe 18 i zbërthejmë në faktorë të thjeshtë, dhe gjejmë:

12	18	2	kështu që <i>shmvp</i> (12, 18) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$; pra edhe <i>shmvp</i> (12, 18, 9) = <i>shmvp</i> (12, 18) = 36.
6	9	2	
3	9	3	
1	3	3	
1	1		

Meqë $36 : 12 = 3$, thyesën $\frac{7}{12}$ e zgjerojmë me 3 dhe fitojmë $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36}$; Meqë

$36 : 18 = 2$, thyesën $\frac{5}{18}$ e zgjerojmë me 2 dhe fitojmë $\frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{10}{36}$; Thyesën $\frac{4}{9}$ e zgjerojmë me $36 : 9 = 4$ dhe marrim $\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{16}{36}$. Kështu, thyesat e dhëna i shndërrojmë në thyesa me emërues të njëjtë:

$$\frac{7}{12} = \frac{21}{36}, \frac{5}{18} = \frac{10}{36}, \frac{4}{9} = \frac{16}{36}.$$

Tash i mbledhim ato dhe gjejmë që:

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{18} + \frac{4}{9} = \frac{21}{36} + \frac{10}{36} + \frac{16}{36} = \frac{21+10+16}{36} = \frac{47}{36} = 1\frac{11}{36}.$$

b) Thyesat $\frac{7}{6}$ dhe $\frac{3}{8}$ i shndërrojmë në thyesa me emërues të njëjtë. Emëruesi i njëjtë i tyre do të jetë *shmv* (8, 6). Meqë

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \text{përfundojmë që } \text{shmv} (8, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Thyesën $\frac{7}{6}$ e zgjerojmë me $24 : 6 = 4$ dhe gjejmë që $\frac{7}{6} = \frac{7 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{28}{24}$; thyesën $\frac{3}{8}$ e zgjerojmë me $24 : 8 = 3$ dhe fitojmë $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$. Prandaj,

$$\frac{7}{6} - \frac{3}{8} = \frac{28}{24} - \frac{9}{24} = \frac{28-9}{24} = \frac{19}{24}.$$

c) Meqë $\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$ kemi: *shmv* (8,12,3) = *shmv* (8, 12) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Thyesën $\frac{5}{8}$ e zgjerojmë me $24 : 8 = 3$ dhe gjejmë që $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$; thyesën $\frac{7}{12}$ e zgjerojmë me $24 : 12 = 2$ dhe marrim $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{14}{24}$; thyesën $\frac{1}{3}$ e zgjerojmë me $24 : 3 = 8$ dhe fitojmë $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}$.

Kështu, thyesat e dhëna i shndërrojmë në thyesa me emërues të njëjtë: $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$, $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$, $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$. Prandaj:

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{12} + \frac{1}{3} = \frac{15}{24} - \frac{14}{24} + \frac{8}{24} = \frac{15-14+8}{24} = \frac{1+8}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 8} = \frac{3}{8}.$$

❶ SHEMBULLI 26.

Të kryhen veprimet **a)** $3\frac{2}{5} + 6\frac{3}{4}$; **b)** $6\frac{7}{8} - 3\frac{2}{3}$; **c)** $12\frac{4}{7} - 10\frac{5}{6}$.

❶ ZGJIDHJE

a) $3\frac{2}{5} + 6\frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{5} + \frac{4 \cdot 6 + 3}{4} = \frac{17}{5} + \frac{27}{4} = \frac{17 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{27 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{68}{20} + \frac{135}{20} = \frac{203}{20} = 10\frac{3}{20};$

Ose: $3\frac{2}{5} + 6\frac{3}{4} = (3+6) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) = 9 + \left(\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5}\right) = 9 + \left(\frac{8}{20} + \frac{15}{20}\right) = 9 + \frac{23}{20} = 9 + 1\frac{3}{20} = 9 + 1 + \frac{3}{20} = 10 + \frac{3}{20} = 10\frac{3}{20}.$

b) $6\frac{7}{8} - 3\frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 6 + 7}{8} - \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{55}{8} - \frac{11}{3} = \frac{55 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{165}{24} - \frac{88}{24} = \frac{77}{24} = 3\frac{5}{24};$

Ose: $6\frac{7}{8} - 3\frac{2}{3} = \left(6 + \frac{7}{8}\right) - \left(3 + \frac{2}{3}\right) = (6-3) + \left(\frac{7}{8} - \frac{2}{3}\right) = 3 + \left(\frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8}\right) = 3 + \left(\frac{21}{24} - \frac{16}{24}\right)$

$$= 3 + \frac{21-16}{24} = 3 + \frac{5}{24} = 3\frac{5}{24}.$$

$$c) 12\frac{4}{7} - 10\frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 12 + 4}{7} - \frac{6 \cdot 10 + 5}{6} = \frac{88}{7} - \frac{65}{6} = \frac{88 \cdot 6}{7 \cdot 6} - \frac{65 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{528}{42} - \frac{455}{42} = \frac{73}{42} = 1\frac{31}{42}.$$

A është e mundur që kjo detyrë të zgjidhet edhe në mënyrën tjetër si detyra b)? Provoni dhe shihni se çdo të ndodhë!

5.2. Shumëzimi dhe pjesëtimi i thyesave.

Prodhimi i dy (ose më shumë) thyesave është një thyesë, që për numërues ka prodhimin e numëruesve dhe për emërues ka prodhimin e emëruesve të thyesave të dhëna. D.m.th. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Të themi që gjithmonë, pas shumëzimit të thyesave, kur ka nevojë, thyesa e fituar si prodhim duhet të thjeshtohet. Nga njëherë, kur është e mundur, është mirë të kryhen thjeshtimet e mundshme, para shumëzimit të numëruesve dhe emëruesve. Po ashtu, për shumëzimin e thyesave vlejnë vetitë e njëjta me ato që vlejnë për shumëzimin e numrave natyrorë, siç janë vetitë e ndërrimit (komutative), e shoqërimit (asociative) dhe e shpërndarjes (distributive) e shumëzimit ndaj mbledhjes dhe ndaj zbritjes.

! SHEMBULLI 27.

Njehsoni a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$; b) $\frac{21}{18} \cdot \frac{33}{7}$; c) $3 \cdot \frac{5}{9}$; ç) $\frac{3}{7} \cdot 5$ d) $3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3}$; dh) $4\frac{2}{3} \cdot 2\frac{3}{5}$; e) $3 \cdot 2\frac{5}{6}$.

! ZGJIDHJE

$$a) \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{24}{36} = (\text{thjeshtojmë me } pmmp(24,36) = 12) = \frac{24:12}{36:12} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ose: } \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 3} = (\text{thjeshtojmë faktorët e përbashkët të numëruesit dhe emëruesit}) = \frac{2}{3}.$$

$$b) \frac{21}{18} \cdot \frac{33}{7} = \frac{21 \cdot 33}{18 \cdot 7} = \frac{693}{126}. \quad \text{Këtë thyesë e thjeshtojmë me } pmmp(693, 126).$$

Meqë

693	126	2	përfundojmë që
693	63	3 (p)	$pmmp(693, 126) = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63.$
231	21	3 (p)	
77	7	7 (p)	
11	1	11	
1	1		

Prandaj, pas thjeshtimit me 63, gjejmë që:

$$\frac{21}{18} \cdot \frac{33}{7} = \frac{693}{126} = \frac{693:63}{126:63} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}.$$

Këtë detyrë, më thjeshtë, e zgjidhim edhe kështu:

$$\frac{21}{18} \cdot \frac{33}{7} = \frac{21 \cdot 33}{18 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11}{2 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} \quad (\text{thjeshtojmë faktorët e përbashkët të numëruesit dhe emëruesit})$$

$$= \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$$

$$\text{c)} \quad 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 5}{9} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 3} = (\text{thjeshtojmë me } 3) = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3};$$

$$\text{g)} \quad \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 1} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7};$$

$$\text{d)} \quad 3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 3}{4} \cdot \frac{3 \cdot 2 + 1}{3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{15 \cdot 7}{4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 4} = (\text{thjeshtojmë me } 3)$$

$$= \frac{5 \cdot 7}{4} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}.$$

$$\text{dh)} \quad 4\frac{2}{3} \cdot 2\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{3} \cdot \frac{5 \cdot 2 + 3}{5} = \frac{14}{3} \cdot \frac{13}{5} = \frac{14 \cdot 13}{3 \cdot 5} = \frac{182}{15} = 12\frac{2}{15}.$$

$$\text{e)} \quad 3 \cdot 3 \cdot 2\frac{5}{6} = 3 \cdot \frac{6 \cdot 2 + 5}{6} = 3 \cdot \frac{17}{6} = \frac{3 \cdot 17}{3 \cdot 2} = (\text{thjeshtojmë me } 3) = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}.$$

Vërejtje. Nga shembujt c) dhe ç) shihet që *thyesa shumëzohet me një numër të plotë nëse numëruesi i saj shumëzohet me atë numër kurse emëruesi mbetet i pandryshuar*. Po ashtu, nga shembujt d), dh), e) shihet që *shumëzimi i numrave të përzier kryhet duke i shndërruar, së pari, ata në thyesa të pathjeshta e pastaj duke i shumëzuar ato thyesa*.

! SHEMBULLI 28.

Sa është: a) $\frac{2}{5}$ e $\frac{15}{8}$? b) Gjysma e gjysmës? c) Gjysma e çerekut?

ç) Çereku i gjysmës? d) Çereku i çerekut?

$$\text{a)} \quad \frac{2}{5} \text{ e } \frac{15}{8} \text{ është e barabartë me } \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{2 \cdot 15}{5 \cdot 8} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{b)} \quad \text{Gjysma e gjysmës} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \text{çereku}; \quad \text{c)} \quad \text{gjysma e çerekut} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \text{një e teta};$$

$$\text{ç)} \quad \text{Çereku i gjysmës} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \text{një e teta};$$

$$\text{d)} \quad \text{çereku i çerekut} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \text{një e gjashtëmbëdhjeta}.$$

Pjesëtimi i dy thyesave bëhet duke shumëzuar thyesën e parë me të anasjelltën (inversen) e thyesës së dytë.
D.m.th.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \left(= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \right).$$

! SHEMBULLI 29.

Të njehsohet: a) $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$; b) $\frac{8}{15} : \frac{4}{5}$; c) $\frac{4}{9} : 7$; d) $3 : \frac{5}{8}$; e) $4\frac{3}{2} : 3\frac{5}{6}$.

! ZGJIDHJE

- a) $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$; b) $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{2}{3}$ (pas thjeshtimit me 4 dhe me 5);
c) $\frac{4}{9} : 7 = \frac{4}{9} : \frac{7}{1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{63}$; d) $3 : \frac{5}{8} = \frac{3}{1} : \frac{5}{8} = \frac{3}{1} \cdot \frac{8}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$;
e) $4\frac{3}{2} : 3\frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{2} : \frac{6 \cdot 3 + 5}{6} = \frac{11}{2} : \frac{23}{6} = \frac{11}{2} \cdot \frac{6}{23} = \frac{11 \cdot 6}{2 \cdot 23} = \frac{11 \cdot 3}{23} = \frac{33}{23} = 1\frac{10}{23}$.
 $= \frac{11 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 23} =$ (thjeshtojmë me 2) $= \frac{11 \cdot 3}{23} = \frac{33}{23} = 1\frac{10}{23}$.

Vërejtje: Të gjitha rregullat që vlejné për shumëzimin dhe pjesëtimin e numrave natyrorë mbesin në fuqi edhe për shumëzimin dhe pjesëtimin e thyesave.

Në shembullin vijues i zgjidhim disa problem, zgjidhja e të cilëve shfrytëzon veprimet me thyesa..

! SHEMBULLI 30. (PËR ATA QË DUAN TË DINË MË SHUMË)

- a) Një bujk kishte planifikuar që të merrte $22\frac{1}{5}$ kuintalë grurë për hektar. Por ai mori $1\frac{1}{4}$ herë më shumë se që planifikoi. Sa kuintal grurë për hektar ka marrë bujku?
- b) Lumi Ishëm është 70 km i gjatë. Lumi Erzen është (afërsisht) $1\frac{2}{7}$ herë më i gjatë se Ishmi. Lumi Shkumbin është (afërsisht) $1\frac{19}{30}$ herë më i gjatë se Erzeni. Sa janë të gjatë Erzeni dhe Shkumbini.
- c) Një bazen mbushet nga tri kroje. Vetëm nga kroi i parë bazeni mbushet për 4 orë, vetëm nga kroi i dytë për 8 orë dhe vetëm nga kroi i tretë për 6 orë. Cila pjesë e bazenit mbushet për një orë, nëse janë të hapura të tri kroat ?
- d) Gjërësia e ngushticës së Dardaneleve dhe asaj të Bosforit së bashku është $1\frac{3}{4}$ km. Ngushtica e Dardaneleve është për $\frac{13}{20}$ km më e gjërë se ngushtica e Bosforit. Sa është gjërësia e secilës ngushticë ?
- e) Tre punëtorë planifikuan t'i montonin 48 kompjuterë. Punëtori i parë i montoi $\frac{5}{12}$ e tyre; punëtori i dytë i montoi $\frac{6}{7}$ e kompjuterëve të mbetur, kurse punëtori i tretë montoi 4 kompjuterë më shumë se $\frac{3}{4}$ e kompjuterëve që i montoi punëtori i dytë. Sa kompjuterë i montuan secili nga punëtorët ? Sa kompjuterë i montuan të tre punëtorët së bashku ? Për sa kompjuterë e tejkaluan planin ?

dh) Dy këmbësorë nisen njëkohësisht prej dy vendeve të ndryshme A dhe B në takim të njëri-tjetrit. Rugën prej vendit A deri në vendin B këmbësori i parë e kalon për 5 orë kurse këmbësori i dytë për 4 orë. Për cilën pjesë të rrugës janë larg njëri-tjetrit këmbësorët pas 2 orësh?

e) Dy punëtorë së bashku e kryejnë një punë për 10 ditë. Pasi punojnë bashkë 4 ditë, punëtori i parë largohet dhe i dyti punën e mbetur e kryen për 9 ditë. Për sa ditë do ta kryejnë atë punë secili nga punëtorët, në qoftë se punon vetëm?

! ZGJIDHJE

a) Meqë $22\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 22 + 1}{5} \cdot \frac{4 \cdot 1 + 1}{4} = \frac{111}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{111 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{111}{4} = 27\frac{3}{4}$,

përfundojmë që bujku ka marrë $27\frac{3}{4}$ kuintalë grurë për hektar.

b) Lumi Erzen është i gjatë $1\frac{2}{7} \cdot 70$ km kurse Shkumbini është i gjatë $\left(1\frac{2}{7} \cdot 70\right) \cdot 1\frac{19}{30}$ km. Meqë

$$\text{dhe } 1\frac{2}{7} \cdot 70 = \frac{7 \cdot 1 + 2}{7} \cdot \frac{70}{1} = \frac{9}{7} \cdot \frac{70}{1} = \frac{9 \cdot 70}{7 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 10}{7 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 10}{1} = 90$$

$$\left(1\frac{2}{7} \cdot 70\right) \cdot 1\frac{19}{30} = 90 \cdot \frac{30 \cdot 1 + 19}{30} = \frac{90}{1} \cdot \frac{49}{30} = \frac{90 \cdot 49}{30} = \frac{30 \cdot 3 \cdot 49}{30} = 3 \cdot 49 = 147,$$

përfundojmë që Erzeni është i gjatë 90 km kurse Shkumbini 147 km.

c) 1. Meqë vetëm nga kroi i parë bazeni mbushet (i tëri) për 4 orë, përfundojmë se kroi i parë për 1 orë mbush $\frac{1}{4}$ e bazenit. Ngjashëm,

2. Meqë vetëm nga kroi i dytë bazeni mbushet (i tëri) për 8 orë, përfundojmë se kroi i dytë për 1 orë mbush $\frac{1}{8}$ e bazenit.

3. Meqë vetëm nga kroi i tretë bazeni mbushet (i tëri) për 6 orë, përfundojmë se kroi i tretë për 1 orë mbush $\frac{1}{6}$ e bazenit. Përfundimisht,

4. Të tre kroit për 1 orë mbushin $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{6}{24} + \frac{3}{24} + \frac{4}{24} = \frac{6+3+4}{24} = \frac{13}{24}$ e bazenit.

Përgjigja : Të tri kroit së bashku për një orë e mbushin $\frac{13}{24}$ e bazenit.

ç) (zgjidhja aritmetike) 1. Po të ishin të dy ngushticat me gjërësi të njëjtë, atëherë gjërësia e të dy ngushticave së bashku do të ishte

$$1\frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{7}{4} - \frac{13}{20} = \frac{35}{20} - \frac{13}{20} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10} \text{ km.}$$

2. Ngushtica e Bosforit është e gjërë

$$1\frac{1}{10} : 2 = \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20} \text{ km}$$

3. Ngushtica e Dardaneleve është e gjërë

$$\frac{11}{20} + \frac{13}{20} = \frac{24}{20} = (\text{pas thjeshtimit me } 4) = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \text{ km.}$$

(Zgjidhja algebrike) : Shënojmë me x gjërësinë e ngushticës së Bosforit. Atëherë $x + \frac{13}{20}$ do të jetë gjërësia e ngushticës së Dardaneleve, kurse gjërësia e të dy ngushticave së bashku do të jetë $x + x + \frac{13}{20} = 2x + \frac{13}{20}$.

Prandaj, sipas kushtit të detyrës, kemi

$$2x + \frac{13}{20} = 1\frac{3}{4}$$

Prej nga rrjedh që

$$2x = \frac{7}{4} - \frac{13}{20} = \frac{35}{20} - \frac{13}{20} = \frac{22}{20} = \frac{11}{10}, \text{ d.m.th. } 2x = \frac{11}{10},$$

prej nga, pas pjesëtimit me 2, gjejmë që

$$x = \frac{11}{10} : 2 = \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{20} \text{ dhe } x + \frac{13}{20} = \frac{11}{20} + \frac{13}{20} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

Përgjigja: Gryka e Bosforit është e gjërë $\frac{11}{20}$ km kurse ajo e Dardaneleve $1\frac{1}{5}$ km.

d) 1. Punëtori i parë i montoi:

$$48 \cdot \frac{5}{12} = \frac{48 \cdot 5}{12} = \frac{12 \cdot 4 \cdot 5}{12} = 4 \cdot 5 = 20$$

2. Pasi që punëtori i parë i ka montuar 20 kompjuterë, kanë mbetur për t'u montuar

$$48 - 20 = 28 \text{ kompjuterë.}$$

3. Punëtori i dytë i ka montuar

$$28 \cdot \frac{6}{7} = \frac{28 \cdot 6}{7} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 6}{7} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ kompjuterë.}$$

4. Punëtori i tretë i ka montuar

$$24 \cdot \frac{3}{4} + 4 = \frac{24 \cdot 3}{4} + 4 = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3}{4} + 4 = 6 \cdot 3 + 4 = 22 \text{ kompjuterë.}$$

5. Të tre punëtorët së bashku i kanë montuar

$$20 + 24 + 22 = 66 \text{ kompjuterë.}$$

6. Të tre punëtorët e kanë tejkaluar planin për

$$66 - 48 = 18 \text{ kompjuterë.}$$

Përgjigja: Punëtori i parë i ka montuar 20 kompjuterë, i dyti 24 dhe i treti 22. Të tre punëtorët, së bashku i kanë montuar 66 kompjuterë; ata e kanë tejkaluar planin për 18 kompjuterë.

dh) 1. Meqë këmbësori i parë për 5 orë e kalon gjithë rrugën, ai për 1 orë e kalon $\frac{1}{5}$ e rrugës, kurse për 2 orë e kalon $2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ e rrugës.

2. Meqë këmbësori i dytë të gjithë rrugën e kalon për 4 orë, ai për 1 orë do ta kalojë $\frac{1}{4}$ e rrugës, kurse për 2 orë do të kalojë $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e rrugës.

3. Të dy këmbësorët për 2 orë do të kalojnë

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10} \text{ e rrugës.}$$

3. Të dy këmbësorët për 2 orë do të kalojnë

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10} \text{ e rrugës.}$$

4. Pas 2 orësh këmbësorët janë të larguar nga njëri tjetri për

$$1 - \frac{9}{10} = \frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \text{ e rrugës.}$$

Përgjigja: Pas 2 orësh këmbësorët janë larg njëri-tjetrit për $\frac{1}{10}$ e rrugës.

e) 1) Meqë të dy punëtorët të gjithë punën e kryejnë për 10 ditë, ata për 1 ditë do të kryejnë $\frac{1}{10}$ e punës, kurse për 4 ditë e kryejnë $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ e punës.

2. Punëtori i dytë (pas largimit të punëtorit të parë) e ka krye vetëm

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ e punës.}$$

3. Meqë punëtori i dytë ka punuar vetëm 9 ditë, për të cilën kohë e ka krye $\frac{3}{5}$ e punës, ai për 1 ditë do të bëjë 9 herë më pak punë, d.m.th. për 1 ditë ai e kryen

$$\frac{3}{5} : 9 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{5 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15} \text{ e punës kështu që gjithë punën e kryen për 15 ditë.}$$

4. Punëtori i parë për 1 ditë e kryen

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{3}{30} - \frac{2}{30} = \frac{1}{30} \text{ e punës, kështu që ai gjithë punën e kryen për 30 ditë.}$$

Përgjigja: Duke punuar vetëm, punëtori i parë e kryen punën për 30 ditë kurse punëtori i dytë për 15 ditë.

IV. Matja dhe masat

Në përgjithësi, shkencat e sotme kanë të bëjë me matjen, ndërsa matja është kontributi më i rëndësishëm që matematika ia ka dhënë asaj. Jo vetëm matja e gjatësisë dhe e sipërfaqes, por edhe e kohës, shpejtësisë, vëllimit dhe probabilitetit. Matematika mundëson që në bazë të disa matjeve dhe rregullave që janë përcaktuar të llogariten matje të tjera pa i bërë ato në praktikë. Kështu, nëse matet rruga e kaluar dhe koha, atëherë mund të llogaritet shpejtësia pa e matur atë.

Fëmijët fillojnë aktivitetin e matjes para se të mësojnë për konceptin e matjes dhe të numrit. Ata janë në gjendje të krahasojnë gjatësinë e dy objekteve të ndryshme pa ditur çfarë është metri dhe çfarë është gjatësia. Prandaj, mund të thuhet se matja bën pjesë në shkathhtësitë themelore që njeriu duhet t'i zhvillojë gjatë jetës së tij, duke filluar sa më herët këtë proces.

Të **matësh** një objekt (gjeometrik) P do të thotë të krahasosh atë objekt me një objekt të njëjtë lloj P_0 që zgjedhet si **njësi matëse**. Numri që tregon se sa herë përmbahet P_0 në P quhet **masë** ose **numër matës**. Kështu, masa është **numër jonegativ**.

Në gjeometri shqyrtohen tri lloje objektesh – **vijat**, **sipërfaqet** dhe **trupat gjeometrikë**. (P. sh. vija janë drejtëza, segmenti, trekëndëshi, shumëkëndëshi, rrethi, etj. Shembuj sipërfaqesh janë sipërfaqja trekëndëshe, sipërfaqja shumëkëndëshe, qarku, sfera, etj. Ndërkaq, trupa janë kuadri, prizmat e ndryshme, piramidat, koni, rruzulli, etj.).

Masa e vijave (të hapura) quhet **gjatësi** ose **perimetër** (përdoret për gjatësinë e vijave të mbyllura); masa e sipërfaqes quhet **syprinë**, ndërkaq masa e trupave quhet **vëllim**. Kështu pra, për dallim nga objektet, masat e tyre janë numra jonegativë.

SHENBULLI 1.

a) Në qoftë se si njësi matëse zgjedhim segmentin P_0 , atëherë, meqë segmenti P i përmban 4 segmente P_0 , themi që gjatësia (masa) e segmentit P e matur me njësinë (segmentin njësi) P_0 është 4 njësi P_0 dhe shkruajmë $P = 4 P_0$. (shih Fig.1).

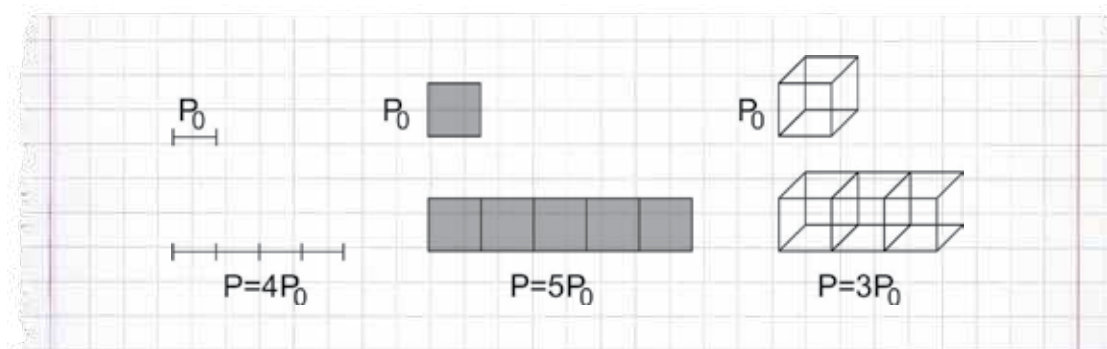


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

b) Në qoftë se si njësi matëse zgjedhim sipërfaqen katrore P_0 , atëherë, meqë sipërfaqja drejtkëndëshe P i përmban 5 sipërfaqe katrore P_0 , themi që syprina (masa) e sipërfaqes drejtkëndëshe P e matur me njësinë (sipërfaqen katrore) P_0 është 5 njësi P_0 dhe shkruajmë $P = 5 P_0$. (shih Fig.2).

c) Në qoftë se si njësi matëse zgjedhim kubin P_0 , atëherë, meqë kuadri P i përmban 3 kube P_0 , themi që vëllimi (masa) e kuadrit P e matur me njësinë (kubin) P_0 është 3 njësi P_0 dhe shkruajmë $P = 3 P_0$. (shih Fig.3).

Vërejmë që **objektet** (vijat, sipërfaqet, trupat) **kongruentë (të puthitshëm) kanë masa** (përkatësisht, gjatësi, syprina, vëllime) **të barabarta**. Po ashtu, vërejmë që **masa e një objekti varet nga zgjedhja e objektit njësi** me të cilin masim.

Të vërejmë, po ashtu, që: *vijat janë objekte me një përmasë (dimension) – gjatësinë e tyre; sipërfaqet janë objekte me dy përmasa - gjatësinë dhe gjërësinë; trupat janë objekte me tri përmasa – gjatësinë, gjërësinë dhe lartësinë.*

1. Matja e vijave

Për njësi matëse të vijave merret **metri** (më saktësisht, segmenti P_0 me gjatësi prej 1 **metri**) i cili shënohet me 1 *m*. Njësitë më të vogla se (nënfishat e) metri (t) janë **decimetri** (1 *dm*), **centimeter** (1 *cm*) dhe **milimetri** (1 *mm*); njësitë më të mëdha se (shumëfishat e) metri (t) janë **dekametri** (1 *dkm*), **hektometri** (1 *hm*) dhe **kilometri** (1 *km*). Marrëdhënja ndërmjet njësive të tilla është:

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm};$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{10} \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ dm} = \frac{1}{1000} \text{ m};$$

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{10} \text{ dm} = \frac{1}{100} \text{ m};$$

$$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m}.$$

$$1 \text{ km} = 10 \text{ hm} = 100 \text{ dkm} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ hm} = 10 \text{ dkm} = 100 \text{ m};$$

$$1 \text{ dkm} = 10 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = \frac{1}{10} \text{ dkm} = \frac{1}{100} \text{ hm} = \frac{1}{1000} \text{ km};$$

$$1 \text{ dkm} = \frac{1}{10} \text{ hm} = \frac{1}{100} \text{ km};$$

$$1 \text{ hm} = \frac{1}{10} \text{ km}.$$

Duke pasur parasysh tabelat e mësipërme, përfundojmë që:

$$\begin{aligned} 1 \text{ dkm} &= 10 \text{ m} = 100 \text{ dm} = 1000 \text{ cm} = 10000 \text{ mm}; \\ 1 \text{ hm} &= 100 \text{ m} = 1000 \text{ dm} = 10000 \text{ cm} = 100000 \text{ mm}; \\ 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m} = 10000 \text{ dm} = 100000 \text{ cm} = 1000000 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Ose:

$$1 \text{ dkm} = 10 \text{ m} = 10^2 \text{ dm} = 10^3 \text{ cm} = 10^4 \text{ mm};$$

$$1 \text{ hm} = 10^2 \text{ m} = 10^3 \text{ dm} = 10^4 \text{ cm} = 10^5 \text{ mm};$$

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^4 \text{ dm} = 10^5 \text{ cm} = 10^6 \text{ mm}.$$

$$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} m = \frac{1}{100} dkm = \frac{1}{1000} hm = \frac{1}{10000} km;$$

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} m = \frac{1}{1000} dkm = \frac{1}{10000} hm = \frac{1}{100000} km;$$

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} m = \frac{1}{10000} dkm = \frac{1}{100000} hm = \frac{1}{1000000} km.$$

Ose:

$$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} m = \frac{1}{10^2} dkm = \frac{1}{10^3} hm = \frac{1}{10^4} km;$$

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{10^2} m = \frac{1}{10^3} dkm = \frac{1}{10^4} hm = \frac{1}{10^5} km;$$

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{10^3} m = \frac{1}{10^4} dkm = \frac{1}{10^5} hm = \frac{1}{10^6} km.$$

Shndërrimin e njësive të mëdha në njësi më të vogla e ilustrojmë në shembullin vijues .

❶ SHEMBULLI 1.

Të shndërrohen në *mm* :

$$12 \text{ m} = 12 \cdot 1000 \text{ mm} = 12\,000 \text{ mm}; \quad 214 \text{ cm} = 214 \cdot 10 \text{ mm} = 2\,140 \text{ mm};$$

$$\frac{3}{4} \text{ dm} = \frac{3}{4} \cdot 100 \text{ mm} = 3 \cdot (100:4) \text{ mm} = 3 \cdot 25 \text{ mm} = 75 \text{ mm};$$

$$32 \text{ dkm} = 32 \cdot 10\,000 \text{ mm} = 320\,000 \text{ mm}; \quad \frac{2}{5} \text{ dkm} = \frac{2}{5} \cdot 100\,000 \text{ mm} = 2 \cdot (100\,000 : 5) \text{ mm} =$$

$$= 2 \cdot 20\,000 \text{ mm} = 40\,000 \text{ mm};$$

$$7 \text{ hm} = 7 \cdot 100\,000 \text{ mm} = 700\,000 \text{ mm}; \quad 3 \text{ km} = 3 \cdot 1\,000\,000 \text{ mm} = 3\,000\,000 \text{ mm}.$$

b) Të shndërrohen në *cm*:

$$7 \text{ m} = 7 \cdot 100 \text{ cm} = 700 \text{ cm}; \quad 25 \text{ dm} = 25 \cdot 10 \text{ cm} = 250 \text{ cm};$$

$$\frac{3}{25} \text{ dkm} = \frac{3}{25} \cdot 1\,000 \text{ cm} = 3 \cdot (1\,000 : 25) \text{ cm} = 3 \cdot 40 \text{ cm} = 120 \text{ cm};$$

$$14 \text{ hm} = 14 \cdot 10\,000 \text{ cm} = 140\,000 \text{ cm};$$

$$\frac{72}{250} \text{ km} = \frac{72}{250} \cdot 100\,000 \text{ cm} = 72 \cdot (100\,000 : 250) \text{ cm} = 72 \cdot 400 \text{ cm} = 28\,800 \text{ cm};$$

c) Të shndërrohen në dm :

$$135 \text{ m} = 135 \cdot 10 \text{ dm} = 1350 \text{ dm}; \quad 167 \text{ dkm} = 167 \cdot 100 \text{ dm} = 16700 \text{ dm};$$

$$\frac{36}{250} \text{ hm} = \frac{36}{250} \cdot 1000 \text{ dm} = 36 \cdot (1000 : 250) \text{ dm} = 36 \cdot 4 \text{ dm} = 144 \text{ dm};$$

$$\frac{6}{500} \text{ km} = \frac{6}{500} \cdot 10\,000 \text{ dm} = 6 \cdot (10\,000 : 500) \text{ dm} = 6 \cdot 20 \text{ dm} = 120 \text{ dm}.$$

ç) Të shndërrohen në m :

$$121 \text{ dkm} = 121 \cdot 10 \text{ m} = 1210 \text{ m}; \quad 32 \text{ hm} = 32 \cdot 100 \text{ m} = 3200 \text{ m};$$

$$\frac{10}{25} \text{ km} = \frac{10}{25} \cdot 1000 \text{ m} = 10 \cdot (1000 : 25) \text{ m} = 10 \cdot 40 \text{ m} = 400 \text{ m}.$$

d) Të shndërrohen në dkm :

$$375 \text{ hm} = 375 \cdot 10 \text{ dkm} = 3750 \text{ dkm}; \quad 136 \text{ km} = 136 \cdot 100 \text{ dkm} = 13\,600 \text{ dkm}.$$

dh) Të shndërrohen në hm :

$$15 \text{ km} = 15 \cdot 10 \text{ hm} = 150 \text{ hm}; \quad 379 \text{ km} = 379 \cdot 10 \text{ hm} = 3\,790 \text{ hm}.$$

Vërejtje. Gjatë kalimit të njësive të mëdha në njësi më të vogla, numri matës i tyre shumëzohet me njësitë dhjetore përkatëse 10, 100, 1000,....

Shndërrimi i njësive më të vogla në njësi më të mëdha ilustron në shembullin vijues.

! SHEMBULLI 2.

a) Të shndërrohen në cm :

$$500 \text{ mm} = 50 \cdot 10 \text{ mm} = 50 \cdot 1 \text{ cm} = 50 \text{ cm}.$$

$$\text{Ose, } 500 \text{ mm} = 500 \cdot \frac{1}{10} \text{ cm} = (500 : 10) \text{ cm} = 50 \text{ cm};$$

b) Të shndërrohen në dm :

$$12\,000 \text{ mm} = 120 \cdot 100 \text{ mm} = 120 \cdot 1 \text{ dm} = 120 \text{ dm},$$

$$\text{ose: } 12\,000 \text{ mm} = 12\,000 \cdot \frac{1}{100} \text{ dm} = (12\,000 : 100) \text{ dm} = 120 \text{ dm};$$

$$35\,700\text{ cm} = 3570 \cdot 10\text{ cm} = 3\,570 \cdot 1\text{ dm} = 3\,570\text{ dm};$$

$$\text{ose, } 35\,700\text{ cm} = 35\,700 \cdot \frac{1}{10}\text{ dm} = (35\,700 : 10)\text{ dm} = 3\,570\text{ dm}.$$

c) Të shndërrohen në m :

$$359\,000\text{ mm} = 359 \cdot 1000\text{ mm} = 359 \cdot 1\text{ m} = 359\text{ m}.$$

$$\text{ose: } 359\,000\text{ mm} = 359\,000 \cdot \frac{1}{1000}\text{ m} = (359\,000 : 1000)\text{ m} = 359\text{ m};$$

$$36\,700\text{ cm} = 367 \cdot 100\text{ cm} = 367 \cdot 1\text{ m} = 367\text{ m};$$

$$\text{ose, } 36\,700\text{ cm} = 36\,700 \cdot \frac{1}{100}\text{ m} = (36\,700 : 100)\text{ m} = 367\text{ m}.$$

$$4\,600\text{ dm} = 460 \cdot 10\text{ dm} = 460\text{ m}; \text{ ose, } 4\,600\text{ dm} = 4\,600 \cdot \frac{1}{10}\text{ m} = 460\text{ m}.$$

d) Të shndërrohen në dkm :

$$2570000\text{ mm} = 257 \cdot 10000\text{ mm} = 257\text{ dkm};$$

$$\text{ose: } 2\,570\,000\text{ mm} = 2\,570\,000 \cdot \frac{1}{10000}\text{ dkm} = (2\,570\,000 : 10\,000)\text{ dkm} = 257\text{ dkm};$$

$$67\,000\text{ cm} = 67 \cdot 1000\text{ cm} = 67\text{ dkm};$$

$$\text{ose, } 67\,000\text{ cm} = 67\,000 \cdot \frac{1}{1000}\text{ dkm} = (67\,000 : 1000)\text{ dkm} = 67\text{ dkm}$$

dh) Të shndërrohen në hm :

$$32\,000\text{ dm} = 32 \cdot 1000\text{ dm} = 32 \cdot 1\text{ hm} = 32\text{ hm}; \text{ ose, } 32\,000 \cdot \frac{1}{1000}\text{ hm} = 32\text{ hm};$$

$$12\,000\text{ m} = 120 \cdot 100\text{ m} = 120 \cdot 1\text{ hm} = 120\text{ hm}; \text{ ose, } 12000 \cdot \frac{1}{100}\text{ hm} = 120\text{ hm};$$

$$1230\text{ dkm} = 123 \cdot 10\text{ dkm} = 123 \cdot 1\text{ hm} = 123\text{ hm}; \text{ ose, } 1230 \cdot \frac{1}{10}\text{ hm} = 123\text{ hm}.$$

e) Të shndërrohen në km :

$$1\,200\,000\text{ cm} = 12 \cdot 10^5\text{ cm} = 12\text{ km}; \text{ ose, } 1\,200\,000\text{ cm} = 12 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{10^5}\text{ km} = 12\text{ km};$$

$$235\,000\text{ m} = 235 \cdot 1000\text{ m} = 235\text{ km}; \text{ ose, } 235\,000\text{ m} = 235 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{10^3}\text{ km} = 235\text{ km}.$$

$$1700\text{ dkm} = 17 \cdot 100\text{ dkm} = 17\text{ km}; \text{ ose, } 1700\text{ dkm} = 1700 \cdot \frac{1}{100}\text{ km} = 17\text{ km}.$$

Vërejtje. Gjatë kalimit të njërive të vogla në njësi më të mëdha, numri matës i tyre shumëzohet me thyesat dhjetore

përkatëse $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$, d.m.th. pjesëtohet me njësitë dhjetore përkatëse 10, 100, 1000,

! SHEMBULLI 3.

Të shndërrohen në njësinë më të vogël që figuron në shprehje:

$$\text{a) } 3 \text{ hm } 5 \text{ dkm } 3 \text{ m } 7 \text{ dm } 3 \text{ cm} = 3 \cdot 10\,000 \text{ cm} + 5 \cdot 1000 \text{ cm} + 3 \cdot 100 \text{ cm} + 7 \cdot 10 \text{ cm} + 3 \text{ cm}$$

$$= (30\,000 + 5000 + 300 + 70 + 3) \text{ cm} = 35\,373 \text{ cm};$$

$$\text{b) } 5 \text{ km } 4 \text{ dkm } 3 \text{ dm} = 5 \cdot 10\,000 \text{ dm} + 4 \cdot 100 \text{ dm} + 3 \text{ dm}$$

$$= (50\,000 + 400 + 3) \text{ dm} = 50\,403 \text{ dm};$$

$$\text{c) } 3 \text{ dkm } 8 \text{ dm } 7 \text{ cm } 9 \text{ mm} = 3 \cdot 10\,000 \text{ mm} + 8 \cdot 100 \text{ mm} + 7 \cdot 10 \text{ mm} + 9 \text{ mm}$$

$$= (30\,000 + 800 + 70 + 9) \text{ mm} = 30\,879 \text{ mm}.$$

$$\text{ç) } 3 \text{ km } 2 \text{ hm } 3 \text{ m } 6 \text{ dm } 3 \text{ cm} = 3 \cdot 100\,000 \text{ cm} + 2 \cdot 10\,000 \text{ cm} + 3 \cdot 100 \text{ cm} + 6 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$+ 3 \text{ cm} = (300\,000 + 20\,000 + 300 + 60 + 3) \text{ cm} = 320\,363 \text{ cm}.$$

! SHEMBULLI 4.

Të shndërrohen në njësi më të mëdha:

$$\text{a) } 54 \text{ mm} = 5 \cdot 10 \text{ mm} + 4 \text{ mm} = 5 \text{ cm} + 4 \text{ mm} = 5 \text{ cm } 4 \text{ mm};$$

$$\text{b) } 720 \text{ mm} = 700 \text{ mm} + 20 \text{ mm} = 7 \cdot 100 \text{ mm} + 2 \cdot 10 \text{ mm} = 7 \text{ dm} + 2 \text{ cm} = 7 \text{ dm } 2 \text{ cm};$$

$$\text{c) } 3\,875 \text{ mm} = 3\,000 \text{ mm} + 800 \text{ mm} + 70 \text{ mm} + 5 \text{ mm} =$$

$$= 3 \cdot 1000 \text{ mm} + 8 \cdot 100 \text{ mm} + 7 \cdot 10 \text{ mm} + 5 \text{ mm}$$

$$= 3 \text{ m} + 8 \text{ dm} + 7 \text{ cm} + 5 \text{ mm} = 3 \text{ m } 8 \text{ dm } 7 \text{ cm } 5 \text{ mm};$$

$$\text{ç) } 123\,000 \text{ mm} = 1 \cdot 100\,000 \text{ mm} + 2 \cdot 10\,000 \text{ mm} + 3 \cdot 1\,000 \text{ mm} = 1 \text{ hm}$$

$$+ 2 \text{ dkm} + 3 \text{ m} = 1 \text{ hm } 2 \text{ dk } 3 \text{ m};$$

$$\text{d) } 136\,704 \text{ mm} = 100\,000 \text{ mm} + 30\,000 \text{ mm} + 6\,000 \text{ mm} + 700 \text{ mm} + 4 \text{ mm}$$

$$= 1 \text{ hm} + 3 \text{ dkm} + 6 \text{ m} + 7 \text{ dm} + 4 \text{ mm} = 1 \text{ hm } 3 \text{ dkm } 6 \text{ m } 7 \text{ dm } 4 \text{ mm}.$$

$$\text{dh) } 2\,760 \text{ cm} = 2\,000 \text{ cm} + 700 \text{ cm} + 60 \text{ cm} = 2 \cdot 1000 \text{ cm} + 7 \cdot 100 \text{ cm} + 6 \cdot 10 \text{ cm}$$

$$= 2 \text{ dkm} + 7 \text{ m} + 6 \text{ dm} = 2 \text{ dkm } 7 \text{ m } 6 \text{ dm}.$$

$$\text{dh) } 10\,746 \text{ dm} = 10\,000 \text{ dm} + 700 \text{ dm} + 40 \text{ dm} + 6 \text{ dm} = 1 \text{ km} + 7 \text{ dkm} + 4 \text{ m} + 6 \text{ dm}$$

$$= 1 \text{ km } 7 \text{ dkm } 4 \text{ m } 6 \text{ dm}.$$

ë) $3\,805\,m = 3\,000\,m + 800\,m + 5\,m = 3\,km + 8\,hm + 5\,m = 3\,km\,8\,hm\,5\,m;$

f) $40\,305\,dkm = 40\,300\,dkm + 5\,dkm = 403 \cdot 100\,dkm + 5\,dkm = 403\,km + 5\,dkm$
 $= 403\,km\,5\,dkm.$

g) $1\,234hm = 1\,230\,hm + 4\,hm = 123 \cdot 10\,hm + 4\,hm = 123\,km + 4\,hm = 123\,km\,4\,hm.$

2. Matja e sipërfaqeve

Për njësi matëse të sipërfaqeve merret **metri katror** (më saktësisht, sipërfaqja katrore P_0 me gjatësi brinje $1m$) i cili shënohet me $1 m^2$.

Njësitë më të vogla se (nënfishat e) metri (t) katror janë **decimetri katror** ($1 dm^2$), **centimetri katror** ($1 cm^2$) dhe **milimetri katror** ($1 mm^2$); njësitë më të mëdha se (shumëfishat e) metri (t) katror janë **dekametri katror** ($1 dkm^2$) ose **ari** ($1 a$), **hektometri katror** ($1 hm^2$) ose **hektari** ($1 ha$) dhe **kilometri katror** ($1 km^2$). Marrëdhënja ndërmjet njësive të tilla është:

$$1 m^2 = 100 dm^2 = 10000 cm^2 = 1000000 mm^2;$$

$$1 dm^2 = 100 cm^2 = 10000 mm^2;$$

$$1 cm^2 = 100 mm^2;$$

Ose:

$$1 m^2 = 10^2 dm^2 = 10^4 cm^2 = 10^6 mm^2;$$

$$1 dm^2 = 10^2 cm^2 = 10^4 mm^2;$$

$$1 cm^2 = 10^2 mm^2.$$

$$1 mm^2 = \frac{1}{100} cm^2 = \frac{1}{10000} dm^2$$

$$= \frac{1}{1000000} m^2;$$

$$1 cm^2 = \frac{1}{100} dm^2 = \frac{1}{10000} m^2;$$

$$1 dm^2 = \frac{1}{100} m^2.$$

Ose:

$$1 mm^2 = \frac{1}{10^2} cm^2 = \frac{1}{10^4} dm^2 = \frac{1}{10^6} m^2;$$

$$1 cm^2 = \frac{1}{10^2} dm^2 = \frac{1}{10^4} m^2;$$

$$1 dm^2 = \frac{1}{10^2} m^2$$

$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hm}^2 (\text{ha}) = 10000 \text{ dkm}^2 (\text{a})$ $= 1000000 \text{ m}^2;$ $1 \text{ hm}^2 (\text{ha}) = 100 \text{ dkm}^2 (\text{a}) = 10000 \text{ m}^2,$ $1 \text{ dkm}^2 (\text{a}) = 100 \text{ m}^2 .$ Ose: $1 \text{ km}^2 = 10^2 \text{ ha} (\text{hm}^2) = 10^4 \text{ a} (\text{dkm}^2) = 10^6 \text{ m}^2;$ $1 \text{ ha} (\text{hm}^2) = 10^2 \text{ a} (\text{dkm}^2) = 10^4 \text{ m}^2;$ $1 \text{ a} (\text{dkm}^2) = 10^2 \text{ m}^2 .$	$1 \text{ m}^2 = \frac{1}{100} \text{ a} = \frac{1}{10000} \text{ ha} = \frac{1}{1000000} \text{ km}^2,$ $1 \text{ a} = \frac{1}{100} \text{ ha} = \frac{1}{10000} \text{ km}^2;$ $1 \text{ ha} = \frac{1}{100} \text{ km}^2.$ Ose: $1 \text{ m}^2 = \frac{1}{10^2} \text{ a} = \frac{1}{10^4} \text{ ha} = \frac{1}{10^6} \text{ km}^2,$ $1 \text{ a} = \frac{1}{10^2} \text{ ha} = \frac{1}{10^4} \text{ km}^2;$ $1 \text{ ha} = \frac{1}{10^2} \text{ km}^2.$
---	--

Duke pasur parasysh tabelat e mësipërme, përfundojmë që:

$$1 \text{ a} (\text{dkm}^2) = 10000 \text{ dm}^2 = 1000000 \text{ cm}^2 = 100000000 \text{ mm}^2 ;$$

$$1 \text{ ha} (\text{hm}^2) = 1000000 \text{ dm}^2 = 100000000 \text{ cm}^2 = 10000000000 \text{ mm}^2;$$

$$1 \text{ km}^2 = 100000000 \text{ dm}^2 = 10000000000 \text{ cm}^2 = 1000000000000 \text{ mm}^2;$$

Ose:

$$1 \text{ a} (\text{dkm}^2) = 10^4 \text{ dm}^2 = 10^6 \text{ cm}^2 = 10^8 \text{ mm}^2;$$

$$1 \text{ ha} (\text{hm}^2) = 10^6 \text{ dm}^2 = 10^8 \text{ cm}^2 = 10^{10} \text{ mm}^2;$$

$$1 \text{ km}^2 = 10^8 \text{ dm}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2 = 10^{12} \text{ mm}^2 .$$

$$1 \text{ dm}^2 = \frac{1}{10^4} \text{ a} (\text{dkm}^2) = \frac{1}{10^6} \text{ ha} (\text{hm}^2) = \frac{1}{10^8} \text{ km}^2;$$

$$1 \text{ cm}^2 = \frac{1}{10^6} \text{ a} (\text{dkm}^2) = \frac{1}{10^8} \text{ ha} (\text{hm}^2) = \frac{1}{10^{10}} \text{ km}^2;$$

$$1 \text{ mm}^2 = \frac{1}{10^8} \text{ dkm}^2 = \frac{1}{10^{10}} \text{ hm}^2 = \frac{1}{10^{12}} \text{ km}^2$$

! SHEMBULLI 5.

a) Të shndërrohen në mm^2 :

$$325 \text{ cm}^2 = 325 \cdot 100 \text{ mm}^2 = 32500 \text{ mm}^2;$$

$$\frac{3}{10} \text{ dm}^2 = \frac{3}{10} \cdot 10\,000 \text{ mm}^2 = 3 \cdot (10\,000 : 10) \text{ mm}^2 = 3 \cdot 1\,000 \text{ mm}^2 = 3\,000 \text{ mm}^2;$$

$$15 \text{ m}^2 = 15 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 = 15\,000\,000 \text{ mm}^2;$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{25} a &= \frac{3}{25} \cdot 10^8 \text{ mm}^2 = 3 \cdot (10^6 \cdot 10^2 : 25) \text{ mm}^2 = 3 \cdot (10^6 \cdot 100 : 25) \text{ mm}^2 \\ &= 3 \cdot (10^6 \cdot 4) \text{ mm}^2 = 3 \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 = 12 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 = 12\,000\,000 \text{ mm}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{250} \text{ ha} &= \frac{3}{250} \cdot 10^{10} \text{ mm}^2 = 3 \cdot (10^7 \cdot 10^3 : 250) \text{ mm}^2 = 3 \cdot 10^7 \cdot (1000 : 250) \text{ mm}^2 \\ &= 3 \cdot 10^7 \cdot 4 \text{ mm}^2 = 12 \cdot 10^7 \text{ mm}^2 = 120\,000\,000 \text{ mm}^2; \end{aligned}$$

$$4 \text{ km}^2 = 4 \cdot 10^{12} \text{ mm}^2 = 4\,000\,000\,000\,000 \text{ mm}^2.$$

b) Të shndërrohen në cm^2 :

$$25 \text{ dm}^2 = 25 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 2500 \text{ cm}^2; \quad 6 \text{ m}^2 = 6 \cdot 10000 \text{ cm}^2 = 60000 \text{ cm}^2;$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{500} a &= \frac{7}{500} \cdot 1000000 \text{ cm}^2 = 7 \cdot (1000000 : 500) \text{ cm}^2 = 7 \cdot (10000 : 5) \text{ cm}^2 \\ &= 7 \cdot 2000 \text{ cm}^2 = 14\,000 \text{ cm}^2; \end{aligned}$$

$$5 \text{ ha} = 5 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 = 500\,000\,000 \text{ cm}^2;$$

$$\begin{aligned} \frac{12}{25000} \text{ km}^2 &= \frac{12}{25 \cdot 10^3} \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = \frac{12}{25} \cdot (10^{10} : 10^3) \text{ cm}^2 = 12 \cdot 10^7 : 25 \text{ cm}^2 \\ &= 12 \cdot 10^5 \cdot 10^2 : 25 \text{ cm}^2 = 12 \cdot 10^5 \cdot (100 : 25) \text{ cm}^2 = 12 \cdot 10^5 \cdot 4 \text{ cm}^2 \\ &= 12 \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 = 4\,800\,000 \text{ cm}^2; \end{aligned}$$

c) Të shndërrohen në dm^2 :

$$42 \text{ m}^2 = 42 \cdot 100 \text{ dm}^2 = 4200 \text{ dm}^2; \quad 5a = 5 \cdot 10000 \text{ dm}^2 = 50000 \text{ dm}^2;$$

$$\begin{aligned} \frac{32}{2500} \text{ ha} &= \frac{32}{2500} \cdot 1\,000\,000 \text{ dm}^2 = 32 \cdot (1\,000\,000 : 2\,500) \text{ dm}^2 = 32 \cdot (10\,000 : 25) \\ &= 32 \cdot 400 \text{ dm}^2 = 12\,800 \text{ dm}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{6}{50000} \text{ km}^2 &= \frac{6}{5 \cdot 10^4} \cdot 10^8 \text{ dm}^2 = \frac{6}{5} \cdot (10^8 : 10^4) \text{ dm}^2 = 6 \cdot (10^{8-4} : 5) \text{ dm}^2 \\ &= 6 \cdot (10^4 : 5) \text{ dm}^2 = 6 \cdot (10\,000 : 5) \text{ dm}^2 = 6 \cdot 2000 \text{ dm}^2 = 12\,000 \text{ dm}^2. \end{aligned}$$

ç) Të shndërrohen në m^2 :

$$11 a = 11 \cdot 100 \text{ m}^2 = 1\,100 \text{ m}^2; \quad 3 \text{ ha} = 3 \cdot 10\,000 \text{ m}^2 = 30\,000 \text{ m}^2;$$

$$\begin{aligned} \frac{16}{2500} \text{ km}^2 &= \frac{16}{2500} \cdot 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 16 \cdot (1\,000\,000 : 2\,500) \text{ m}^2 = 16 \cdot 400 \text{ m}^2 = 6\,400 \\ &\text{m}^2. \end{aligned}$$

d) Të shndërrohen në $a = dkm^2$:

$$35 \text{ ha} = 35 \text{ hm}^2 = 35 \cdot 100 \text{ a} = 3\,500 \text{ a} = 3\,500 \text{ dkm}^2;$$

$$\frac{1}{2} \text{ km}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\,000 \text{ a} = 5\,000 \text{ a} = 5\,000 \text{ dkm}^2.$$

dh) Të shndërrohen në $ha = hm^2$:

$$18 \text{ km}^2 = 18 \cdot 100 \text{ ha} = 1800 \text{ ha}; \quad \frac{3}{4} \text{ km}^2 = \frac{3}{4} \cdot 100 \text{ ha} = 3 \cdot (100 : 4) \text{ ha} = 75 \text{ ha}.$$

Vërejtje. Gjatë kalimit të njësive të mëdha katrore në njësi më të vogla katrore, numri matës i tyre shumëzohet me katrorët e njësive dhjetore përkatëse 10^2 , $100^2 = 10^4$, $1000^2 = 10^6, \dots$

Shndërrimi i njësive më të vogla në njësi më të mëdha ilustrohet në shembullin vijues.

SHSEMBULLI 6.

a) Të shndërrohen në cm^2 :

$$3000 \text{ mm}^2 = 30 \cdot 100 \text{ mm}^2 = 30 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2,$$

$$\text{ose, } 3000 \text{ mm}^2 = 3000 \cdot \frac{1}{100} \text{ cm}^2 = (3000 : 100) \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2;$$

b) Të shndërrohen në dm^2 :

$$700\,000 \text{ mm}^2 = 70 \cdot 10\,000 \text{ mm}^2 = 70 \cdot 1 \text{ dm}^2 = 70 \text{ dm}^2,$$

$$\text{ose: } 700\,000 \text{ mm}^2 = 7 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{10^4} \text{ dm}^2 = 7 \cdot (10^5 : 10^4) \text{ dm}^2 = 7 \cdot 10 \text{ dm}^2 = 70 \text{ dm}^2;$$

$$35700 \text{ cm}^2 = 357 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 357 \cdot 1 \text{ dm}^2 = 357 \text{ dm}^2;$$

$$\text{ose, } 35\,700 \text{ cm}^2 = 35\,700 \cdot \frac{1}{100} \text{ dm}^2 = (35\,700 : 100) \text{ dm}^2 = 357 \text{ dm}^2;$$

c) Të shndërrohen në m^2 :

$$32\,000\,000 \text{ mm}^2 = 32 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 = 32 \cdot 1 \text{ m}^2 = 32 \text{ m}^2;$$

$$\text{ose: } 32\,000\,000 \text{ mm}^2 = 32 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^6} \text{ m}^2 = 32 \cdot (10^6 : 10^6) \text{ m}^2 = 32 \text{ m}^2.$$

$$580\,000 \text{ cm}^2 = 58 \cdot 10\,000 \text{ cm}^2 = 58 \cdot 1 \text{ m}^2 = 58 \text{ m}^2;$$

$$\text{Ose: } 580\,000 \text{ cm}^2 = 58 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{10^4} \text{ m}^2 = 58 \cdot (10^4 : 10^4) \text{ m}^2 = 58 \text{ m}^2.$$

$$4\,600 \text{ dm}^2 = 46 \cdot 100 \text{ dm}^2 = 46 \text{ m}^2; \text{ ose } 4\,600 \text{ dm}^2 = 4\,600 \cdot \frac{1}{100} \text{ m}^2 = 46 \text{ m}^2.$$

ç) Të shndërrohen në $a = dkm^2$:

$$700\,000\,000 \text{ mm}^2 = 7 \cdot 10^8 \text{ mm}^2 = 7 \cdot 1 \text{ dkm}^2 = 7 \text{ dkm}^2 = 7 \text{ a};$$

$$\text{ose: } 700\,000\,000 \text{ mm}^2 = 7 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{10^8} \text{ a} = 7 \cdot (10^8 : 10^8) \text{ a} = 7 \text{ a};$$

$$6\,000\,000 \text{ cm}^2 = 6 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 = 6 \cdot 1 \text{ dkm}^2 = 6 \text{ a};$$

$$\text{ose, } 6\,000\,000 \text{ cm}^2 = 6 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^6} \text{ a} = 6 \cdot (10^6 : 10^6) \text{ a} = 6 \text{ a};$$

$$780\,000 \text{ dm}^2 = 78 \cdot 10\,000 \text{ dm}^2 = 78 \cdot 1 \text{ dkm}^2 = 78 \text{ dkm}^2 = 78 \text{ a},$$

$$\text{ose: } 780\,000 \text{ dm}^2 = 78 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{10^4} \text{ dkm}^2 = 78 \cdot (10^4 : 10^4) \text{ dkm}^2 = 78 \text{ a};$$

d) Të shndërrohen në $ha = hm^2$:

$$3\,000\,000\,dm^2 = 3 \cdot 10^6\,dm^2 = 3 \cdot 1\,hm^2 = 3\,hm^2 = 3\,ha;$$

$$\text{Ose, } 3\,000\,000\,dm^2 = 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^6}ha = 3 \cdot (10^6 : 10^6)ha = 3\,ha;$$

$$830\,000\,m^2 = 83 \cdot 10^4\,m^2 = 83 \cdot 1\,hm^2 = 83\,hm^2 = 83\,ha,$$

$$\text{ose, } 830\,000\,m^2 = 83 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{10^4}ha = (83 \cdot (10^4 : 10^4))ha = 83\,ha;$$

$$7\,300\,a = 73 \cdot 100\,a = 73 \cdot 1\,ha = 73\,ha, \text{ ose } 7\,300\,a = 7\,300 \cdot \frac{1}{100}ha = 73\,ha.$$

dh) Të shndërrohen në km^2 :

$$2\,000\,000\,m^2 = 2 \cdot 10^6\,m^2 = 2 \cdot 1\,km^2 = 2\,km^2,$$

$$\text{ose, } 2\,000\,000\,m^2 = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^6}km^2 = 2 \cdot (10^6 : 10^6)km^2 = 2\,km^2;$$

$$130\,000\,a = 13 \cdot 10^4\,a = 13\,km^2, \text{ ose } 130\,000\,a = 13 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{10^4}km^2 = 13\,km^2.$$

$$3\,600\,ha = 36 \cdot 100\,ha = 36\,km^2, \text{ ose } 360\,ha = 3\,600 \cdot \frac{1}{100}km^2 = 36\,km^2.$$

Vërejtje. Gjatë kalimit të njërive të vogla katrore në njësi më të mëdha katrore, numri matës i tyre shumëzohet me katrorët e thyesave dhjetore përkatëse $\frac{1}{10^2}, \frac{1}{100^2} = \frac{1}{10^4}, \frac{1}{1000^2} = \frac{1}{10^6}, \dots$ d.m.th. pjesëtohet me katrorët e njërive dhjetore përkatëse $10^{-2}, 100^{-2} = 10^{-4}, 1000^{-2} = 10^{-6}, \dots$

SHEMBULLI 7.

Të shndërrohen në njësinë më të vogël katrore që figuron në shprehje:

$$\text{a) } 8\,m^2\,4\,dm^2\,7\,mm^2 = 8 \cdot 10^6\,mm^2 + 4 \cdot 10^4\,mm^2 + 7\,mm^2 \\ = (8\,000\,000 + 40\,000 + 7)\,mm^2 = 8\,040\,007\,mm^2;$$

$$\text{b) } 5\,a\,2\,m^2\,6\,dm^2\,3\,cm^2 = 5 \cdot 10^6\,cm^2 + 2 \cdot 10^4\,cm^2 + 6 \cdot 100\,cm^2 + 3\,cm^2 \\ = (5\,000\,000 + 20\,000 + 600 + 3)\,cm^2 = 5\,020\,603\,cm^2;$$

$$\text{c) } 7\,km^2\,4\,ha\,3\,a\,5\,m^2 = 7 \cdot 10^6\,m^2 + 4 \cdot 10^4\,m^2 + 3 \cdot 100\,m^2 + 5\,m^2 \\ = (7\,000\,000 + 40\,000 + 300 + 5)\,m^2 = 7\,040\,305\,m^2;$$

$$\text{ç) } 4\,a\,5\,dm^2\,7\,cm^2\,8\,mm^2 = 4 \cdot 10^8\,mm^2 + 5 \cdot 10^4\,mm^2 + 7 \cdot 100\,mm^2 + 8\,mm^2 \\ = (400\,000\,000 + 50\,000 + 700 + 8)\,mm = 400\,050\,708\,mm^2.$$

SHËMBULLI 8.

Të shndërrohen në njësi më të mëdha katrore:

a) $720 \text{ cm}^2 = 700 \text{ cm}^2 + 20 \text{ cm}^2 = 7 \cdot 100 \text{ cm}^2 + 20 \text{ cm}^2 = 7 \text{ dm}^2 + 20 \text{ cm}^2 = 7 \text{ dm}^2 20 \text{ cm}^2$;

b) $38750 \text{ dm}^2 = 30000 \text{ dm}^2 + 8700 \text{ dm}^2 + 50 \text{ dm}^2 = 3 \cdot 10^4 \text{ dm}^2 + 87 \cdot 10^2 \text{ dm}^2 + 50 \text{ dm}^2 =$
 $= 3 \text{ a} + 87 \text{ m}^2 + 50 \text{ dm}^2 = 3 \text{ a } 87 \text{ m}^2 50 \text{ dm}^2$;

c) $104120012 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 100 \ 000 \ 000 \text{ mm}^2 + 4 \cdot 1 \ 000 \ 000 \text{ mm}^2 + 12 \cdot 10 \ 000 \text{ mm}^2 + 12 \text{ mm}^2$
 $= 1 \cdot 10^8 \text{ mm}^2 + 4 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 + 12 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 + 12 \text{ mm}^2 = 1 \text{ a } 4 \text{ m}^2 12 \text{ dm}^2 12 \text{ mm}^2$;

ç) $12300035 \text{ cm}^2 = 12 \ 000 \ 000 \text{ cm}^2 + 300 \ 000 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2 = 12 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 +$
 $30 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2 = 12 \text{ a} + 30 \text{ m}^2 + 35 \text{ cm}^2 = 12 \text{ a } 30 \text{ m}^2 35 \text{ cm}^2$;

d) $136704021 \text{ dm}^2 = 100000000 \text{ dm}^2 + 36000000 \text{ dm}^2 + 700000 \text{ dm}^2 + 4000 \text{ dm}^2 + 21 \text{ dm}^2$

$$= 10^8 \text{ dm}^2 + 36 \cdot 10^6 \text{ dm}^2 + 70 \cdot 10^4 \text{ dm}^2 + 40 \cdot 10^2 \text{ dm}^2 + 21 \text{ dm}^2$$

$$= 1 \text{ km}^2 + 36 \text{ ha} + 70 \text{ a} + 40 \text{ m}^2 + 21 \text{ dm}^2 = 1 \text{ km}^2 36 \text{ ha } 70 \text{ a } 40 \text{ m}^2 21 \text{ dm}^2$$

dh) $2761236 \text{ m}^2 = 2000000 \text{ m}^2 + 760000 \text{ m}^2 + 1200 \text{ m}^2 + 36 \text{ m}^2$
 $= 2 \cdot 10^6 \text{ m}^2 + 76 \cdot 10^4 \text{ m}^2 + 12 \cdot 10^2 \text{ m}^2 + 36 \text{ m}^2 = 2 \text{ km}^2 + 76 \text{ ha} + 12 \text{ a} + 36 \text{ m}^2 = 2 \text{ km}^2 76 \text{ ha } 12 \text{ a } 36 \text{ m}^2$

e) $30746 \text{ a} = 30000 \text{ a} + 700 \text{ a} + 46 \text{ a} = 3 \cdot 10^4 \text{ a} + 7 \cdot 10^2 \text{ a} + 46 \text{ a} = 3 \text{ km}^2 + 7 \text{ ha} + 46 \text{ a} = 3 \text{ km}^2 7 \text{ ha } 46 \text{ a}$.

b) $38750 \text{ dm}^2 = 30000 \text{ dm}^2 + 8700 \text{ dm}^2 + 50 \text{ dm}^2 = 3 \times 10^4 \text{ dm}^2 + 87 \times 10^2 \text{ dm}^2 + 50 \text{ dm}^2 =$
 $= 3 \text{ a} + 87 \text{ m}^2 + 50 \text{ dm}^2 = 3 \text{ a } 87 \text{ m}^2 50 \text{ dm}^2$;

c) $104120012 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 100 \ 000 \ 000 \text{ mm}^2 + 4 \cdot 1 \ 000 \ 000 \text{ mm}^2 + 12 \cdot 10 \ 000 \text{ mm}^2 + 12 \text{ mm}^2$
 $= 1 \cdot 10^8 \text{ mm}^2 + 4 \times 10^6 \text{ mm}^2 + 12 \times 10^4 \text{ mm}^2 + 12 \text{ mm}^2 = 1 \text{ a } 4 \text{ m}^2 12 \text{ dm}^2 12 \text{ mm}^2$;

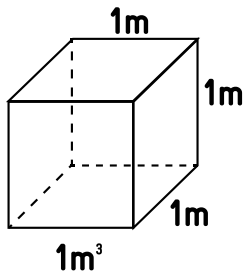
ç) $12300035 \text{ cm}^2 = 12 \ 000 \ 000 \text{ cm}^2 + 300 \ 000 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2 = 12 \times 10^6 \text{ cm}^2 +$
 $30 \times 10^4 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2 = 12 \text{ a} + 30 \text{ m}^2 + 35 \text{ cm}^2 = 12 \text{ a } 30 \text{ m}^2 35 \text{ cm}^2$;

d) $136704021 \text{ dm}^2 = 100000000 \text{ dm}^2 + 36000000 \text{ dm}^2 + 700000 \text{ dm}^2 + 4000 \text{ dm}^2 + 21 \text{ dm}^2$
 $= 10^8 \text{ dm}^2 + 36 \times 10^6 \text{ dm}^2 + 70 \times 10^4 \text{ dm}^2 + 40 \times 10^2 \text{ dm}^2 + 21 \text{ dm}^2$
 $= 1 \text{ km}^2 + 36 \text{ ha} + 70 \text{ a} + 40 \text{ m}^2 + 21 \text{ dm}^2 = 1 \text{ km}^2 36 \text{ ha } 70 \text{ a } 40 \text{ m}^2 21 \text{ dm}^2$.

dh) $2761236 \text{ m}^2 = 2000000 \text{ m}^2 + 760000 \text{ m}^2 + 1200 \text{ m}^2 + 36 \text{ m}^2$
 $= 2 \cdot 10^6 \text{ m}^2 + 76 \cdot 10^4 \text{ m}^2 + 12 \cdot 10^2 \text{ m}^2 + 36 \text{ m}^2 = 2 \text{ km}^2 + 76 \text{ ha} + 12 \text{ a} + 36 \text{ m}^2 = 2 \text{ km}^2 76 \text{ ha } 12 \text{ a } 36 \text{ m}^2$

e) $30746 \text{ a} = 30000 \text{ a} + 700 \text{ a} + 46 \text{ a} = 3 \times 10^4 \text{ a} + 7 \times 10^2 \text{ a} + 46 \text{ a} = 3 \text{ km}^2 + 7 \text{ ha} + 46 \text{ a} = 3 \text{ km}^2 7 \text{ ha } 46 \text{ a}$.

3. Matja e trupave



Për njësi matëse të trupave merret **metri kub** (më saktësisht, kubi P_0 me gjatësi brinje $1m$) i cili shënohet me $1 m^3$.

Njësitë më të vogla se (nënfishat e) metri (t) kub janë **decimetri kub** ($1 dm^3$), **centimetri kub** ($1 cm^3$) dhe **milimetri kub** ($1 mm^3$); njësitë më të mëdha se (shumëfishat e) metri (t) janë **dekametri kub** ($1 dkm^3$), **hektometri kub** ($1 hm^3$) dhe **kilometri kub** ($1 km^3$). Marrëdhënja ndërmjet njësive të tilla është dhënë në tabelat vijuese:

$1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000000 cm^3 = 1000000000 mm^3;$ $1 dm^3 = 1000 cm^3 = 1000000 mm^3;$ $1 cm^3 = 1000 mm^3;$ Ose: $1 m^3 = 10^3 dm^3 = 10^6 cm^3 = 10^9 mm^3;$ $1 dm^3 = 10^3 cm^3 = 10^6 mm^3;$ $1 cm^3 = 10^3 mm^3.$	$1 mm^3 = \frac{1}{10^3} cm^3 = \frac{1}{10^6} dm^3 = \frac{1}{10^9} m^3$ $1 cm^3 = \frac{1}{10^3} dm^3 = \frac{1}{10^6} m^3;$ $1 dm^3 = \frac{1}{10^3} m^3.$
$1 km^3 = 10^3 hm^3 = 10^6 dkm^3 = 10^9 m^3;$ $1 hm^3 = 10^3 dkm^3 = 10^6 m^3;$ $1 dkm^3 = 10^3 m^3.$	$1 m^3 = \frac{1}{10^3} dkm^3 = \frac{1}{10^6} hm^3 = \frac{1}{10^9} km^3;$ $1 dkm^3 = \frac{1}{10^3} hm^3 = \frac{1}{10^6} km^3;$ $1 hm^3 = \frac{1}{10^3} km^3.$
Duke pasur parasysh tabelat e mësipërme, përfundojmë që:	
$1 dkm^3 = 10^6 dm^3 = 10^9 cm^3 = 10^{12} mm^3;$ $1 hm^3 = 10^9 dm^3 = 10^{12} cm^3 = 10^{15} mm^3;$ $1 km^3 = 10^{12} dm^3 = 10^{15} cm^3 = 10^{18} mm^3.$	$1 dm^3 = \frac{1}{10^6} dkm^3 = \frac{1}{10^9} hm^3 = \frac{1}{10^{12}} km^3;$ $1 cm^3 = \frac{1}{10^9} dkm^3 = \frac{1}{10^{12}} hm^3 = \frac{1}{10^{15}} km^3;$ $1 mm^3 = \frac{1}{10^{12}} dkm^3 = \frac{1}{10^{15}} hm^3 = \frac{1}{10^{18}} km^3$

SHENBULLI 9.

$$14 \text{ cm}^3 = 14 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 14 \cdot 1\,000 \text{ mm}^3 = 14\,000 \text{ mm}^3;$$

$$\frac{3}{100} \text{ dm}^3 = \frac{3}{100} \cdot 10^6 \text{ mm}^3 = 3 \times (10^6 : 10^2) \text{ mm}^3 = 3 \cdot 10^4 \text{ mm}^3 = 30\,000 \text{ mm}^3;$$

$$5 \text{ m}^3 = 5 \cdot 10^9 \text{ mm}^3 = 5\,000\,000\,000 \text{ mm}^3;$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{25} \text{ dkm}^3 &= \frac{3}{25} \cdot 10^{12} \text{ mm}^3 = 3 \cdot (10^{12} : 25) \text{ mm}^3 = 3 \cdot (10^{10} \cdot 100 : 25) \text{ mm}^3 \\ &= 3 \cdot (10^{10} \cdot 4) \text{ mm}^3 = 12 \cdot 10^{10} \text{ mm}^3 = 120\,000\,000\,000 \text{ mm}^3; \end{aligned}$$

b) Të shndërrohen në cm^3 :

$$43 \text{ dm}^3 = 43 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 43\,000 \text{ cm}^3; \quad 8 \text{ m}^3 = 8 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 8\,000\,000 \text{ cm}^3;$$

$$7 \text{ dkm}^3 = 7 \cdot 10^9 \text{ cm}^3 = 7\,000\,000\,000 \text{ cm}^3;$$

$$5 \text{ hm}^3 = 5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^3 = 5\,000\,000\,000\,000 \text{ cm}^3;$$

c) Të shndërrohen në dm^3 :

$$23 \text{ m}^3 = 23 \cdot 10^3 \text{ dm}^3 = 23\,000 \text{ dm}^3; \quad 5 \text{ dkm}^3 = 5 \cdot 10^6 \text{ dm}^3 = 5\,000\,000 \text{ dm}^3;$$

$$12 \text{ hm}^3 = 12 \cdot 10^9 \text{ dm}^3 = 12\,000\,000\,000 \text{ dm}^3;$$

$$4 \text{ km}^3 = 4 \cdot 10^{12} \text{ dm}^3 = 4\,000\,000\,000\,000 \text{ dm}^3.$$

ç) Të shndërrohen në m^3 :

$$51 \text{ dkm}^3 = 51 \cdot 10^3 \text{ m}^3 = 51\,000 \text{ m}^3; \quad 5 \text{ hm}^3 = 5 \cdot 10^6 \text{ m}^3 = 5\,000\,000 \text{ m}^3;$$

$$31 \text{ km}^3 = 31 \cdot 10^9 \text{ m}^3 = 31\,000\,000\,000 \text{ m}^3.$$

d) Të shndërrohen në dkm^3 :

$$53 \text{ hm}^3 = 53 \cdot 10^3 \text{ dkm}^3 = 53\,000 \text{ dkm}^3;$$

$$\frac{1}{2} \text{ km}^3 = \frac{1}{2} \cdot 10^6 \text{ dkm}^3 = (10^6 : 2) \text{ dkm}^3 = 10^5 \cdot (10 : 2) \text{ dkm}^3 = 500\,000 \text{ dkm}^3.$$

dh) Të shndërrohen në hm^3 :

$$9 \text{ km}^3 = 9 \cdot 10^3 \text{ hm}^3 = 9\,000 \text{ hm}^3;$$

$$\frac{3}{4} \text{ km}^3 = \frac{3}{4} \cdot 10^3 \text{ hm}^3 = 3 \cdot (1000 : 4) \text{ hm}^3 = 750 \text{ hm}^3.$$

Vërejtje. Gjatë kalimit të njësive të mëdha kubike në njësi më të vogla kubike, numri matës i tyre shumëzohet me kubet e njësive dhjetore përkatëse 10^3 , $100^3 = 10^6$, $1000^3 = 10^9$,

Shndërrimi i njësive më të vogla kubike në njësi më të mëdha kubike ilustron në shembullin vijues.

SHENBULLI 10.

Të shndërrohen në cm^3 :

$$15000 \text{ mm}^3 = 15 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = 15 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 15 \text{ cm}^3,$$

$$\text{ose, } 15000 \text{ mm}^2 = 15 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{10^3} \text{ cm}^3 = 15 \text{ cm}^3;$$

b) Të shndërrohen në dm^3 :

$$12000000 \text{ mm}^3 = 12 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 = 12 \cdot 1 \text{ dm}^3 = 12 \text{ dm}^3,$$

$$\text{ose: } 12000000 \text{ mm}^3 = 12 \times 10^6 \cdot \frac{1}{10^6} \text{ dm}^3 = 12 \cdot (10^6 : 10^6) \text{ dm}^3 = 12 \text{ dm}^3;$$

$$350000 \text{ cm}^3 = 350 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 350 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 350 \cdot 1 \text{ dm}^3 = 350 \text{ dm}^3;$$

$$\text{ose, } 350000 \text{ cm}^3 = 35 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{10^3} \text{ dm}^3 = 35 \cdot (10^4 : 10^3) \text{ dm}^3 = 35 \cdot 10 \text{ dm}^3 = 350 \text{ dm}^3;$$

c) Të shndërrohen në m^3 :

$$42000000000 \text{ mm}^3 = 42 \cdot 10^9 \text{ mm}^3 = 42 \cdot 1 \text{ m}^3 = 42 \text{ m}^3;$$

$$\text{ose: } 42000000000 \text{ mm}^3 = 42 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{10^9} \text{ m}^3 = 42 \cdot (10^9 : 10^9) \text{ m}^3 = 42 \text{ m}^3.$$

$$51000000 \text{ cm}^3 = 51 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 51 \cdot 1 \text{ m}^3 = 51 \text{ m}^3;$$

$$\text{Ose: } 51000000 \text{ cm}^3 = 51 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^6} \text{ m}^3 = 51 \cdot (10^6 : 10^6) \text{ m}^3 = 51 \text{ m}^3.$$

$$461000 \text{ dm}^3 = 461 \cdot 10^3 \text{ dm}^3 = 461 \cdot 1 \text{ m}^3 = 461 \text{ m}^3;$$

$$\text{ose } 461000 \text{ dm}^3 = 461 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{10^3} \text{ m}^3 = 461 \text{ m}^3;.$$

ç) Të shndërrohen në dkm^3 :

$$4000000000 \text{ cm}^3 = 4 \cdot 10^9 \text{ cm}^3 = 4 \cdot 1 \text{ dkm}^3 = 4 \text{ dkm}^3;$$

$$\text{ose, } 4000000000 \text{ cm}^3 = 4 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{10^9} \text{ dkm}^3 = 4 \cdot (10^9 : 10^9) \text{ dkm}^3 = 4 \text{ dkm}^3;$$

$$70000000 \text{ dm}^3 = 70 \cdot 10^6 \text{ dm}^3 = 70 \cdot 1 \text{ dkm}^3 = 70 \text{ dkm}^3,$$

$$\text{ose: } 70000000 \text{ dm}^3 = 70 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^6} \text{ dkm}^3 = 70 \text{ dkm}^3;$$

d) Të shndërrohen në hm^3 :

$$5000000000 \text{ dm}^3 = 5 \cdot 10^9 \text{ dm}^3 = 5 \cdot 1 \text{ hm}^3 = 5 \text{ hm}^3 ;$$

$$\text{Ose, } 5000000000 \text{ dm}^3 = 5 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{10^9} \text{ hm}^3 = 5 \cdot (10^9 : 10^9) \text{ hm}^3 = 5 \text{ hm}^3;$$

$$37000000 \text{ m}^3 = 37 \cdot 10^6 \text{ m}^3 = 37 \cdot 1 \text{ hm}^3 = 37 \text{ hm}^3,$$

$$\text{ose, } 37000000 \text{ m}^3 = 37 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^6} \text{ hm}^3 = 37 \cdot (10^6 : 10^6) \text{ hm}^3 = 37 \text{ hm}^3;$$

$$15000 \text{ dkm}^3 = 15 \cdot 10^3 \text{ dkm}^3 = 15 \cdot 1 \text{ hm}^3 = 15 \text{ hm}^3,$$

$$\text{ose } 15000 \text{ dkm}^3 = 15 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{10^3} \text{ hm}^3 = 15 \text{ hm}^3.$$

dh) Të shndërrohen në km^3 :

$$170000000000 m^3 = 17 \cdot 10^9 m^3 = 17 \cdot 1 km^3 = 17 km^3,$$

$$\text{ose, } 170000000000 m^3 = 17 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{10^9} km^3 = 17 km^3;$$

$$21000000 dkm^3 = 21 \cdot 10^6 dkm^3 = 21 km^3,$$

$$\text{ose } 21000000 dkm^3 = 21 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^6} km^3 = 21 km^3.$$

$$26000 hm^3 = 26 \times 10^3 hm^3 = 26 km^3, \quad \text{ose } 26000 hm^3 = 26 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{10^3} km^3 = 26 km^3.$$

Vërejtje. Gjatë kalimit të njësive të vogla kubike në njësi më të mëdha kubike, numri matës i tyre shumëzohet

me kubet e thyesave dhjetore përkatëse $\frac{1}{10^3}, \frac{1}{100^3} = \frac{1}{10^6}, \frac{1}{1000^3} = \frac{1}{10^9}, \dots$, d.m.th. pjesëtohet me kubet e njësive dhjetore përkatëse $10^3, 100^3 = 10^6, 1000^3 = 10^9, \dots$

SHEMBULLI 11.

Të shndërrohen në njësinë më të vogël kubike që figuron në shprehje:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 7 m^3 5 dm^3 9 mm^3 &= 7 \cdot 10^9 mm^3 + 5 \cdot 10^6 mm^3 + 9 mm^3 \\ &= (7\,000\,000\,000 + 5\,000\,000 + 9) mm^3 = 7\,005\,000\,009 mm^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 5 dkm^3 12 m^3 123 dm^3 35 cm^3 &= 5 \cdot 10^9 cm^3 + 12 \cdot 10^6 cm^3 + 123 \cdot 10^3 cm^3 + 35 cm^3 \\ &= (5\,000\,000\,000 + 12\,000\,000 + 123\,000 + 35) cm^3 = 5\,012\,123\,035 cm^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 4 km^3 15 hm^3 31 dkm^3 52 m^3 &= 4 \cdot 10^9 m^3 + 15 \cdot 10^6 m^3 + 31 \cdot 10^3 m^3 + 52 m^3 \\ &= (4\,000\,000\,000 + 15\,000\,000 + 31\,000 + 52) m^3 = 4\,015\,031\,052 m^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ç)} \quad 12 dkm^3 51 dm^3 175 cm^3 132 mm^3 &= 12 \cdot 10^{12} mm^3 + 51 \cdot 10^6 mm^3 + 175 \cdot 10^3 mm^3 \\ &+ 132 mm^3 = (12\,000\,000\,000\,000 + 51\,000\,000 + 175\,000 + 132) mm^3 \\ &= 12\,000\,051\,175\,132 mm^3. \end{aligned}$$

SHEMBULLI 12.

Të shndërrohen në njësi më të mëdha kubike:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 30647 cm^3 &= 30\,000 cm^3 + 647 cm^3 = 30 \cdot 10^3 cm^3 + 647 cm^3 = 30 dm^3 + 647 cm^3 \\ &= 30 dm^3 647 cm^3; \end{aligned}$$

$$\text{b) } 3875002 \text{ dm}^3 = 3\,000\,000 \text{ dm}^3 + 875\,000 \text{ dm}^3 + 2 \text{ dm}^3 = 3 \cdot 10^6 \text{ dm}^3 + 875 \cdot 10^3 \text{ dm}^3 \\ + 2 \text{ dm}^3 = 3 \text{ dkm}^3 + 875 \text{ m}^3 + 2 \text{ dm}^3 = 3 \text{ dkm}^3 875 \text{ m}^3 2 \text{ dm}^3.$$

$$\text{c) } 610008000 \text{ mm}^3 = 610\,000\,000 \text{ mm}^3 + 8\,000 \text{ mm}^3 = 610 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 + 8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \\ = 610 \text{ dm}^3 + 8 \text{ cm}^3 = 610 \text{ dm}^3 8 \text{ cm}^3;$$

$$\text{ç) } 134200037 \text{ cm}^3 = 134\,000\,000 \text{ cm}^3 + 200\,000 \text{ cm}^3 + 37 \text{ cm}^3 = 134 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 \\ + 200 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 + 37 \text{ cm}^3 = 134 \text{ m}^3 + 200 \text{ dm}^3 + 37 \text{ cm}^3 = 134 \text{ m}^3 200 \text{ dm}^3 37 \text{ cm}^3;$$

$$\text{d) } 36704021 \text{ dm}^3 = 36\,000\,000 \text{ dm}^3 + 704\,000 \text{ dm}^3 + 21 \text{ dm}^3 \\ = 36 \cdot 10^6 \text{ dm}^3 + 704 \cdot 10^3 \text{ dm}^3 + 21 \text{ dm}^3 = 36 \text{ dkm}^3 + 704 \text{ m}^3 + 21 \text{ dm}^3 \\ = 36 \text{ dkm}^3 704 \text{ m}^3 21 \text{ dm}^3;$$

$$\text{dh) } 3571248 \text{ m}^3 = 3\,000\,000 \text{ m}^3 + 571\,000 \text{ m}^3 + 248 \text{ m}^3 = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 + 571 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \\ + 248 \text{ m}^3 = 3 \text{ hm}^3 + 571 \text{ dkm}^3 + 248 \text{ m}^3 = 3 \text{ hm}^3 571 \text{ dkm}^3 248 \text{ m}^3.$$

V. Gjeometria

Hyrje

Gjeometria është njëra nga disiplinat më të vjetra të matematikës. Zanafilla e saj është shumë e largët, që nga koha e sumerëve, egjiptianëve, babilonasve, grekëve, indianëve, etj. shumë shekuj para erës sonë. Këta popuj të lashtë kanë përdorur figura të ndryshme gjeometrike si: segmente, kënde, trekëndësha dhe rrrathë në jetën e përditshme dhe kanë shfrytëzuar disa veti të këtyre figurave. Fjala *gjeometri* rrjedh nga greqishtja e vjetër (γεωμετρία), që do të thotë *dhe-matje* (geo-dhe dhe metria-matje). Në bazë të disa dokumenteve të shkruara gjeometria (dhe-matja), në fillim është marrë më shumë me çështje llogaritare, p.sh. për të llogaritur gjatësinë e ndonjë vije, syprinën e ndonjë figure, apo vëllimin e ndonjë trupi gjeometrik. Kjo ka ndodhur, sepse lumi Nil shpesh ka vërshuar arat bujqësore përreth tij duke humbur kufijtë e parcelave, dhe pas vërshimeve ka lindur nevoja që sërish të bëhet ndarja e atyre parcelave duke ricaktuar kufijtë e tyre, por duke ruajtur sipërfaqen e tyre. Nga aty ka dalë emri gjeometri (dhe-matje).

Më vonë, njerëzimit i ka interesuar të studiojë vetitë e disa figurave gjeometrike, në mënyrë që të nxjerrë fakte të reja lidhur me to. Në fillim, këto veti janë vërejtur zakonisht në bazën eksperimentale, si p.sh. nëse te disa trekëndësha kënddrejtë, pas matjeve të kateteve dhe hipotenuzës, është konstatuar se te të gjithë ata trekëndësha kënddrejtë hipotenuza është brinjë më e gjatë e tij, dhe si përfundim kanë nxjerr se *te çdo trekëndësh kënddrejtë hipotenuza është brinja më e gjatë e tij*. Kjo mënyrë e të konkluduarit njihet si *induksion jo i plotë*.

Në shekullin IV para erës sonë, grekët kishin një rol kyç në zhvillimin e shkencës dhe kulturës. Ata shfrytëzuan të gjitha rezultatet shkencore të arritura nga popujt më të lashtë (egjiptianët, babilonasit, etj.) dhe filluan të bënë sistemin e tyre. Ata për vërtetimin e fakteve futën në përdorim të ashtuquajturën *metodën deduktive*, e cila për të vërtetuar një fakt të ri shfrytëzonte të gjitha faktet e mëparshme. Me fjalë të tjera, çdo pohim i ri do të duhej të ishte rrjedhim logjik i pohimeve (fakteve) të vërtetuara, ose të marra pa vërtetim para tij. Kjo metodë ka luajtur një rol të rëndësishëm edhe në disiplinat tjera shkencore. Themelues i kësaj metode konsiderohet Talesi i Miletës. Konsiderohet se ai ka arritur t'i vërtetojë disa teorema si: kongruencën e të gjitha këndeve të drejta, pastaj përballë këndeve kongruente të një trekëndëshi shtrihen brinjët kongruente të tij; pastaj këndi periferik i një rrethi mbi diametër është i drejtë; pastaj se brinjët e dy trekëndëshave të ngjashëm janë proporcionale, etj. Ai, duke shfrytëzuar ngjashmërinë e trekëndëshave kënddrejtë dhe barakrahës, ka arritur të njehsojë lartësinë e piramidës së Keopsit.

Më vonë, mënyrën e vërtetimit të fakteve e përsosi edhe më shumë filozofi dhe matematikani grek Pitagora. Ai ka udhëtuar shumë duke u njohur me shumë kultura dhe duke shfrytëzuar të arritura shkencore të vendeve dhe popujve të ndryshëm. Kështu p.sh. nga babilonasit ai kishte dëgjuar teoremën e famshme që shpreh raportin mes brinjëve të një trekëndëshi kënddrejtë, por Pitagora arrin ta vërtetojë, prandaj ajo teoremë sot e mban emrin e tij. Ai ka konsideruar se vërtetimi i një teoreme duhet të jetë i bazuar në një renditje logjike të fakteve. Konsiderohet se ai është krijuesi i metodës deduktive të vërtetimit të fakteve, jo vetëm në gjeometri, por edhe në shkencat tjera.

Shumë shkolla në Greqinë e vjetër, të cilat merreshin me çështje të ndryshme si: shoqërore, filozofike, shkencore etj., si lëndë të obligueshme e kishin edhe gjeometrinë. Kjo ka ndodhur, sepse aso kohe konsiderohej se gjeometria do t'u ndihmonte filozofëve të ardhshëm që të gjykojnë në mënyrë logjike. Aristoteli (384-322 p.e.s), nxënësi i Platonit (427-347 p.e.s) e mbronte idenë se çdo nocion i ri duhet të përkufizohet me ndihmën e nocioneve që ndodhen afër tij, natyrisht me ndryshime karakteristike. Ky princip është shfrytëzuar për 2000 vitet e ardhshme.

Zhvillim të hovshëm gjeometria përjeton në kohën e Euklidit, i cili në vitin 300 p.e.s. shkroi veprën e quajtur *Elementet*, e cila përmbante 9 libra, ku në mënyrë shumë të thukët trajtoheshin temat nga gjeometria dhe nga algjebra. Euklidi shfrytëzoi metodën deduktive në trajtimin e materies. Elementet me shekuj janë konsideruar si vepra më e përsosur matematike. Euklidi në librat e tij është munduar që të përkufizojë çdo gjë, duke përfshirë edhe pikën e drejtëzën. P.sh. ai shkruan se: *Pika është diçka që nuk ka pjesë*. apo *drejtëza është një vijë e cila ka gjatësi, por nuk ka gjerësi* (është njësoj e vendosur ndaj pikave të saja). Me atë rast ai shfrytëzon kuptime të cilat po ashtu duhet definuar si: *pjesën, gjerësinë, vijën*, etj. Me fjalë të tjera ky sistem i ndërtimit të gjeometrisë nuk është logjik. Kjo tregon se Euklidi përpiqej që çdo gjë ta përkufizonte, duke harruar se për të ndërtuar një disiplinë shkencore duhet nisur nga disa objekte të cilat merren pa përkufizim dhe disa postulate (aksioma) të cilat merren të sakta pa i vërtetuar. Në këtë mënyrë është zhvilluar gjeometria e Euklidit deri në shek. XIX.

Në këtë doracak, që u dedikohet mësuesve të shkollës fillore I-V, pjesa e gjeometrisë dhe ajo e punës me të dhëna është dizajnuar në atë mënyrë që arsimtarëve u janë ofruar më shumë informacione se që atyre u duhen për të shpjeguar materien për nxënës. Kjo do të thotë se arsimtarët duhet të dijnë shumë më shumë se nxënësi, sepse vetëm në këtë mënyrë mësuesi do të jetë më i lehtë për arsimtarin nga njëra anë dhe më e kuptueshme për nxënësin nga ana tjetër. Natyrisht, këtu vetëm i kemi dhënë disa pohime të rëndësishme (pa vërtetim) të cilat pasqyrojnë pozitën e ndryshme të figurave gjeometrike.

Mësuesit të cilët janë të interesuar që të thellojnë njohuritë e tyre nga gjeometria, këtë mund ta bëjnë duke shfrytëzuar tekste të ndryshme të gjeometrisë që u dedikohen shkollave fillore dhe atyre të mesme, apo të shfrytëzojnë burime të informatave në internet.

5.1. Kuptimet themelore të Gjeometrisë

Është shumë e rëndësishme që të kuptohet se gjeometria ndërtohet duke u nisur nga kuptimet themelore të saj të cilat janë: *pika, drejtëza dhe rrafshi* (fig. 5.1). Këto kuptime (koncepte) nuk përkufizohen, por merren si të tilla. Kështu, drejtëzën dhe rrafshin mund t'i imagjinojmë vetëm si bashkësi të pafundme pikash, të cilat nuk janë të kufizuara, por në asnjë mënyrë t'i përkufizojmë. Po ashtu, edhe relacioni: “...ndodhet ndërmjet...” në bashkësinë e pikave të një drejtëze konsiderohet relacion themelor. Kjo tregon se nuk mund ta përshkruajmë me fjalë (përkufizojmë) faktin se pika *B* ndodhet ndërmjet pikave *A* dhe *C* (fig. 5.1). Këtë fakt e shënojmë në këtë mënyrë:

(A-B-C).

Siç e përmendëm edhe në hyrje, metoda deduktive e ndërtimit të gjeometrisë është e një rëndësie të veçantë dhe ajo bazohet në disa kuptime themelore, aksioma (pohime pa vërtetim) dhe relacione themelore. Për ndërtimin e gjeometrisë nuk shërbehemi vetëm me objekte dhe fakte gjeometrike, por i shfrytëzojmë edhe aparatit dhe pohimet e algjebërës, si p.sh. nocionin e bashkësisë, nocionin e elementit, veprimet me bashkësi, etj.

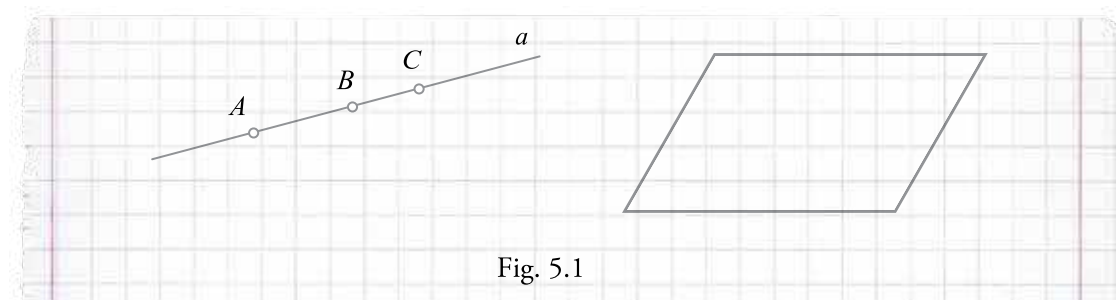


Fig. 5.1

Përkufizim 1. Bashkësinë e të gjitha pikave do ta quajmë hapësirë tridimensionale dhe do ta shënojmë me E^3 . Pikat e hapësirës E^3 do t'i shënojmë me shkronja të mëdha të alfabetit latin si: $A, B, C, D, \dots$. Drejtëzat do t'i konsiderojmë si nënbashkësi të hapësirës E^3 dhe simbolikisht do t'i shënojmë me shkronjat e vogla të alfabetit latin si: $a, b, c, d, \dots$, por ndonjëherë drejtëzën e shënojmë edhe me ndihmën e dy pikave të saj (p.sh. A dhe B) kështu AB .

Rrafshet po ashtu do t'i konsiderojmë si nënbashkësi të hapësirës E^3 dhe simbolikisht do t'i shënojmë me shkronjat të alfabetit grek si: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, por ndonjëherë mund t'i shënojmë edhe ndryshe.

Për pikat që i takojnë një drejtëze do të themi se janë *kolineare*, ndërsa për pikat që i takojnë një rrafshi do të themi se janë *komplanare*.

Përkufizim 2. Figurë gjeometrike do të quajmë çdo nënbashkësi jo boshë F të hapësirës E^3 .

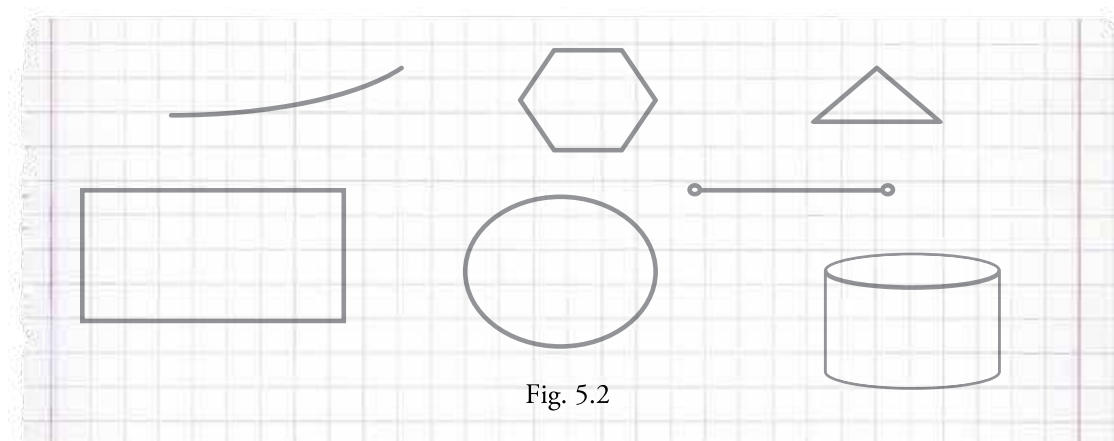


Fig. 5.2

Në figurën fig. 5.2 janë dhënë disa figura gjeometrike.

D.m.th. figurë konsiderohet edhe bashkësia e përbërë prej një pike të vetme; figura është edhe çdo drejtëz, segment, shumëkëndësh, sipërfaqe shumëkëndëshe, rreth, sipërfaqe rrethore, sferë, rruzull, cilindër, piramidë, kon, etj. Disa nga këto figura janë të rrafshta (shtrihen në një rrafsh) dhe disa jo. Disa nga figurat të cilat nuk shtrihen në një rrafsh (kubi, kuboidi, sfera, cilindri, piramida, koni) quhen *trupa gjeometrikë*.

Për dy figura F_1 dhe F_2 do të themi se janë *kongruente* (përputhen) nëse duke lëvizur njëren figurë, p.sh. figurën

F_1 mund të mbulohet figura F_2 dhe anasjelltas, duke lëvizur figurën F_2 , mund të mbulohet figura F_1 fig. 5.3).

5.2. Pohimet themelore dhe ato të nxjerra të Gjeometrisë

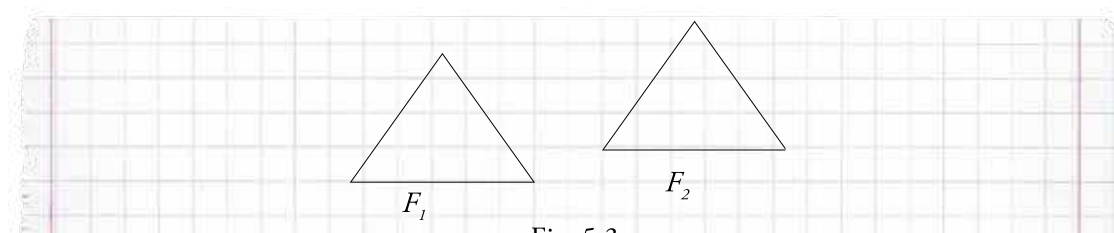


Fig. 5.3

Pikat, drejtëzat dhe rrafshet kanë disa veti të cilat i dallojnë nga figurat tjera. Si elemente dhe nënbashkësi të të njëjtës hapësirë ato janë të lidhura me disa relacione të nënbashkësive si p.sh. i *takon*, *nuk i takon*, *përmbahet*, etj. Vetitë e figurave gjeometrike shprehen përmes *pohimeve*, të cilat i ndajmë në:

- Pohime themelore
- Pohime të nxjerra.

Në pohimet themelore bëjnë pjesë të ashtuquajtura *aksiomat*. Këto janë pohime të cilat konsiderohen si të sakta pa i vërtetuar. Numri i tyre duhet të jetë minimal dhe ndonjë aksiomë nuk guxon të jetë rrjedhim logjik i aksiomave të tjera. Në grupin e pohimeve të nxjerra bëjnë pjesë të gjitha pohimet tjera të cilat duhet vërtetuar. Këto pohime, varësisht nga pesha (rëndësia) emërtohen si: teorema, pohime, lema, apo rrjedhime.

Vërtetimi i këtyre pohimeve bazohet në metodën deduktive. Ekzistojnë dy mënyra për vërtetimin e një pohimi (teoreme) në mënyrën deduktive: direkte dhe ajo indirekte. Mënyra direkte bazohet në pohimet që janë vërtetuar më parë dhe vërtetohet pohimi vijues. Ndërsa metoda indirekte shfrytëzon të ashtuquajturin supozimin e kundërt dhe (në sajë të fakteve të vërtetuara më parë) duke arritur në një kundërthënie.

Aksiomat në gjeometri ndahen në pesë grupe: aksiomat e incidencës, renditjes, kongurencës, vazhdueshmërisë dhe aksiomën e paraleleve. Në kuadër të këtij doracaku do t'i japim vetëm aksiomat e incidencës (lidhjes) dhe aksiomën e paraleleve. Por preferohet që arsimtarët të shfletojnë ndonjë tekst të gjeometrisë në të cilin janë të dhëna edhe grupet e tjera të aksiomave.

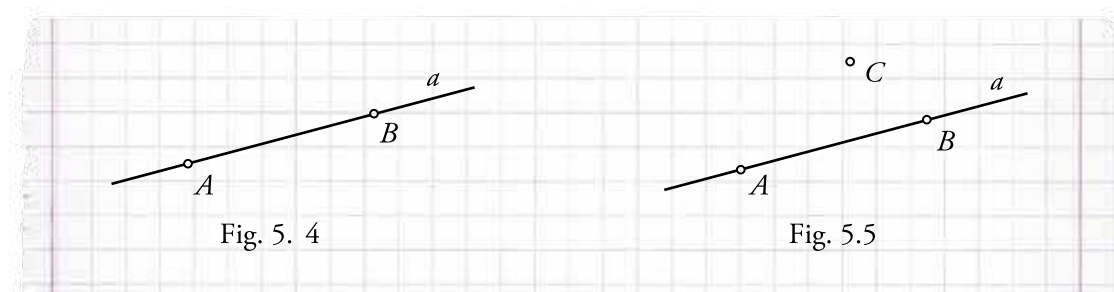
5.3. Aksiomat e incidencës (lidhjes)

Këto aksioma njihen edhe si *aksiomat e lidhjes* sipas Hilbertit (*D. Hilbert (1862-1943)*), dhe këto shprehin raportet mes pikave, drejtëzave dhe rrafshëve përmes simbolikës së bashkësive.

Nëse një pikë e njëjtë (e hapësirës) është shënuar me dy shkronja të ndryshme A dhe B , simbolikisht do

të shkruajmë $A \equiv B$ dhe do të themi se pikat A dhe B *përputhen*. Ngjashëm do ta kemi situatën edhe me drejtëzat dhe rrafshet. Në vazhdim do t'i japim aksiomat e incidencës.

Aksioma 1. Çdo drejtëz përmban të paktën dy pika të ndryshme. Ekzistojnë tri pika që nuk i tkajonë të njëjtës drejtëz (fig. 5.4, fig. 5.5).



Për pikat të cilat i takojnë të njëjtës drejtëz do të themi se janë pika *kolineare*, kurse për ato tri pika të cilat nuk i takojnë të njëjtës drejtëz do të themi se janë *jokolineare*.

Aksioma 2. Çdo dy pika të ndryshme përcaktojnë një drejtëz të vetme (fig. 5.4).

Aksioma 3. Çdo tri pika jokolineare përcaktojnë një rrafsh të vetëm (fig. 5.6).

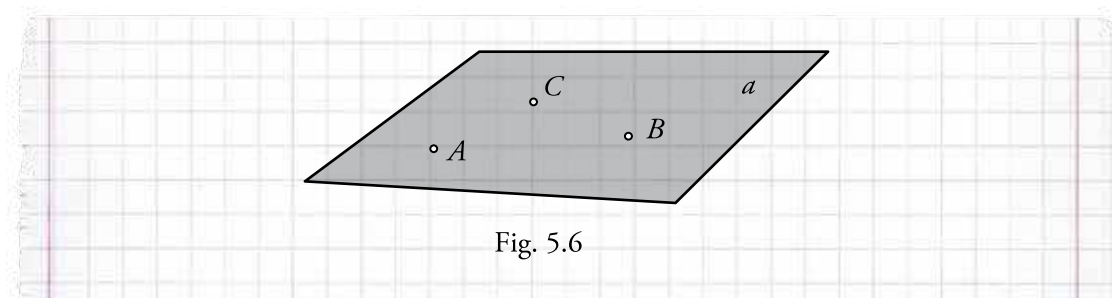


Fig. 5.6

Aksioma 4. Çdo rrafsh përmban të paktën tri pika. Ekzistojnë katër pika që nuk i takojnë të njëjtit rrafsh (fig. 5.7).

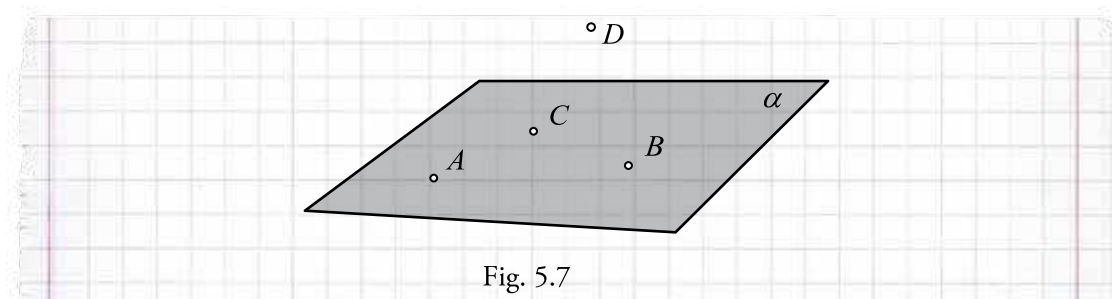


Fig. 5.7

Për katër apo më shumë pika të cilat i takojnë të njëjtit rrafsh do të themi se janë pika *komplanare*, kurse për ato të cilat nuk i takojnë të njëjtit rrafsh do të themi se nuk janë *komplanare*.

Aksioma 5. Çdo drejtëz, e cila me një rrafsh ka dy pika të përbashkëta, përmbahet në atë rrafsh (fig. 5.8).

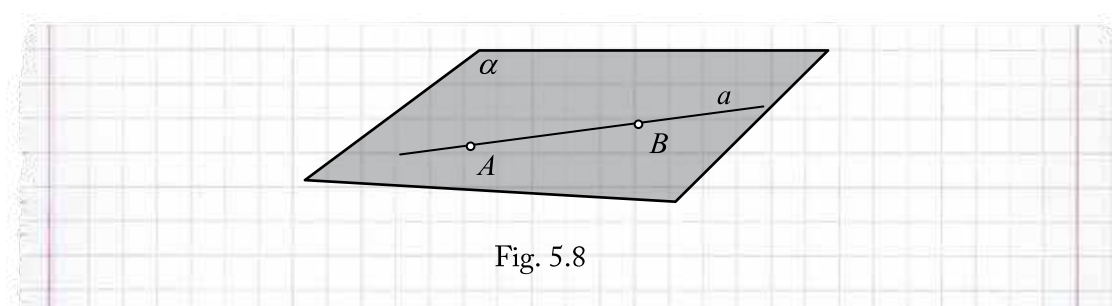


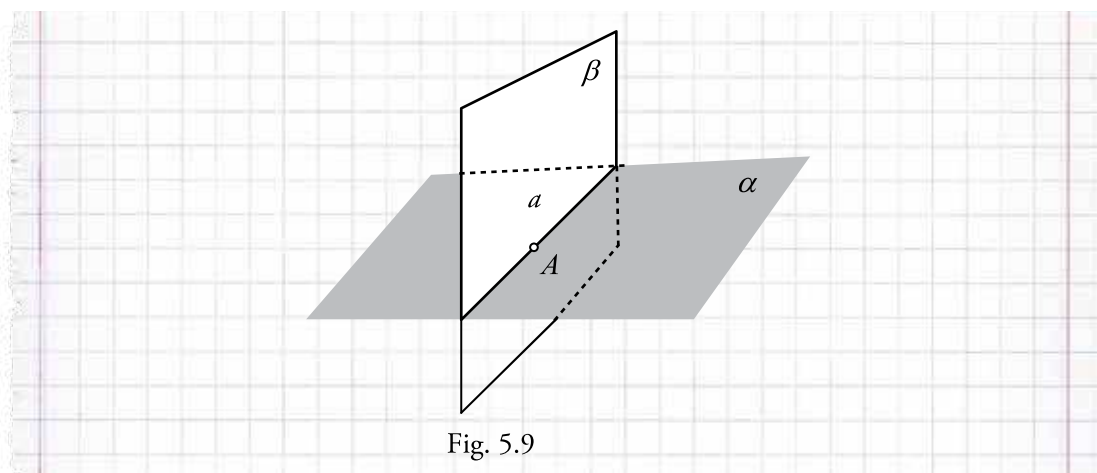
Fig. 5.8

Në këtë rast simbolikisht shkruajmë: $a \subset \alpha$.

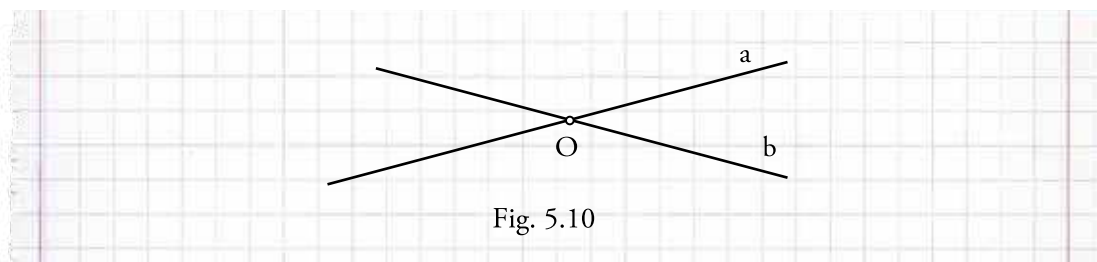
Aksioma 6. Nëse dy rrafsh të ndryshme kanë një pikë të përbashkët, atëherë ato kanë një drejtëz të përbashkët (fig. 5.9).

Në këtë rast simbolikisht shkruajmë: $\alpha \cap \beta = a$. Me ndihmën e këtyre aksiomave shprehen raportet midis pikave, drejtëzave dhe rrafshëve.

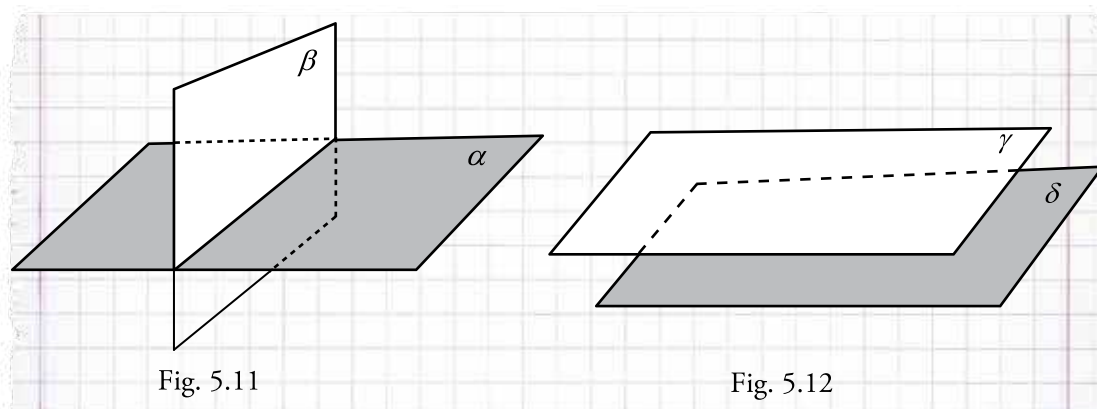
Në vazhdim do t'i japim disa përkufizime dhe do t'i formulojmë disa pohime (pa vërtetim) të cilat po ashtu paraqesin raportet ndërmjet pikave, drejtëzave dhe rrafshëve.



Përkufizim 1. Për dy drejtëza të ndryshme **a** dhe **b** themi se priten nëse ato kanë një pikë të përbashkët dhe simbolikisht shkruajmë $a \cap b = \{O\}$ (fig. 5.10).



Përkufizim 3. Nëse pikat e përbashkëta të dy rrafshëve α dhe β i takojnë vetëm një drejtëz, do të themi se rrafshet priten (fig. 5.11). Për dy rrafshë γ dhe δ , të cilat nuk kanë pika të përbashkëta, do të themi se janë paralele dhe simbolikisht do të shkruajmë $\gamma \parallel \delta$ (fig. 5.12).



Është e një rëndësie të veçantë që arsimtari t'i përvetësojë pohimet që vijnë, sepse në atë mënyrë ai do të krijojë një kulturë elementare nga gjeometria, e që në punën e tij të përditshme me nxënës do ta ketë shumë më të lehtë mësimdhënien e temave të ndryshme nga gjeometria.
Drejtëza dhe një pikë jashtë saj përcaktojnë një rrafsh të vetëm (fig. 5.13).

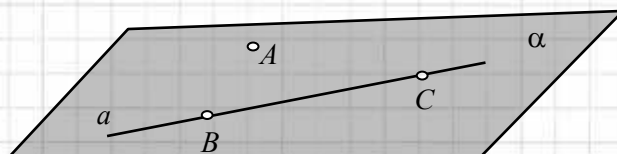


Fig. 5.13

Dy drejtëza që priten përcaktojnë një rrafsh të vetëm (fig. 5.14).

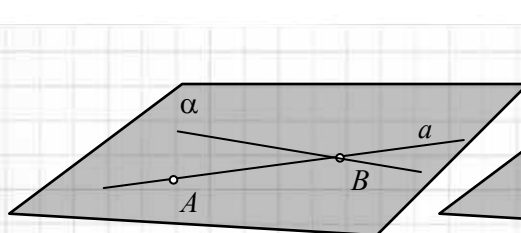


Fig. 5.14

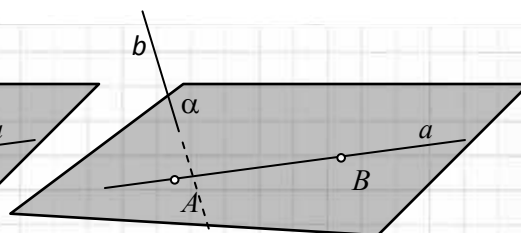


Fig. 5.15

Dy drejtëza të cilat nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh, nuk mund të priten (fig. 5.15).

Përkufizim 4. Nëse drejtëza dhe rrafshi kanë vetëm një pikë të përbashkët, atëherë themi se drejtëza e depërton rrafshin (fig. 5.16). Simbolikisht shkruajmë : $a \cap \alpha = \{A\}$. Në të kundërtën, nëse drejtëza dhe rrafshi nuk kanë pika të përbashkëta, do të themi se drejtëza është paralele me rrafshin (fig. 5.17). Simbolikisht shkruajmë : $a \parallel \alpha$, ose $a \cap \alpha = \emptyset$.

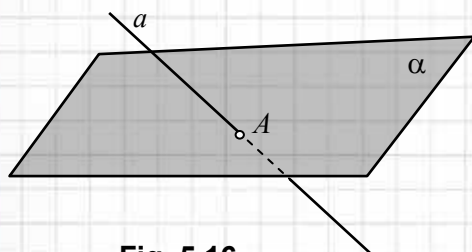


Fig. 5.16

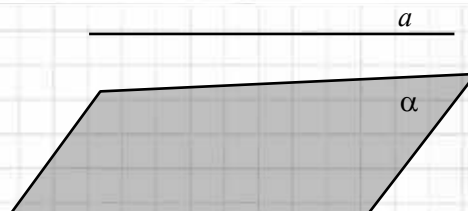


Fig. 5.17

Është evidente se dy drejtëza të ndryshme kanë më së shumti një pikë të përbashkët.

! SHEMBULLI 1.

Është dhënë figura fig. 5.18. Shyrtoni se cili prej relacioneve është i saktë dhe cili jo. Arsyetoni!

- $a \in \alpha$.
- $a \subset \alpha$.
- $a \equiv \alpha$.
- $A, B \in \alpha$.
- $a \cap \alpha = a$.
- $a \cap b \neq \emptyset$.
- $a \cap b = \emptyset$.
- $\{B, C\} \in a$.
- $\{B, C\} \subseteq a$.
- $b \cap \alpha = \{A\}$.
- $b \cap \alpha = A$.
- $A \notin a$.

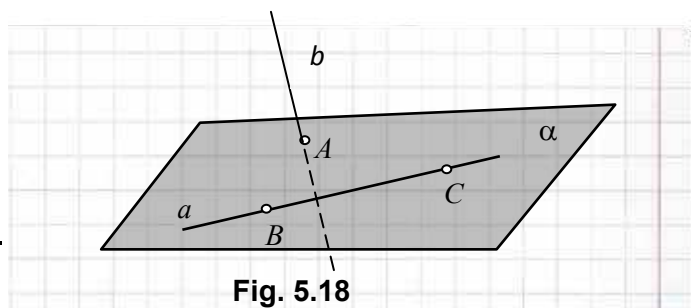


Fig. 5.18

! ZGHIDHJE

Është evidente se pohimi në rastin a) nuk është i saktë, sepse një drejtëz nuk mund të jetë si element i një rrafshi, por ajo është nënbashkësi e tij. Kështu, pohimi nën b) është i saktë. Po ashtu, c) nuk është i saktë, sepse në atë rast do të kishim se çdo pikë e rrafshit do t'i takonte edhe drejtëzës. Nëse vërojmë me kujdes, atëherë konstatojmë se pohimet d), e), g), i), j) dhe l) janë të sakta, kurse të tjerat jo. (Arsyetoni!)

! SHEMBULLI 2.

Është dhënë bashkësia prej tri pikave jokolineare $\{A, B, C\}$.

- Sa drejtëza të ndryshme mund të konstruktohen nga këto pika?
- Sa rrafshe të ndryshme mund të konstruktohen nga këto tri pika?

! ZGHIDHJE

Zgjidhja. A) Është e qartë se këto tri pika përcaktojnë tri drejtëza të ndryshme: AB , BC dhe CA , ndërsa përcaktojnë një rrafsh të vetëm (fig. 5.19).

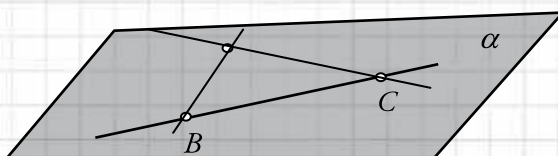


Fig. 5.19

Detyra për punë të pavarur

1. Sa drejtëza mund t'i konstruktojmë nga katër pika A, B, C dhe D , të cilat i takojnë një rrafshi dhe asnjë treshe prej tyre nuk është kolineare?
Rez. Gjashtë: AB, AC, AD, BC, BD dhe CD .
2. Sa rrafshe përcaktojnë katër pika jokomplanare A, B, C dhe D ?
Rez. Meqenëse çdo tri pika jokolineare përcaktojnë një rrafsh, atëherë katër pika jokomplanare përcaktojnë 4 rrafshe: rrafshi ABC, ABD, ACD dhe BCD .

5.4. Aksioma e paraleleve

Më herët përkufizuam paralelshmërinë ndërmjet dy rrafsheve dhe paralelshmërinë ndërmjet drejtëzës dhe rrafshit. Në vazhdim do të përkufizojmë relacionin e paralelshmërisë në bashkësinë e drejtëzave.

Përkufizim 5. Për dy drejtëza a dhe b themi se janë paralele dhe simbolikisht shkruajmë $a \parallel b$ nëse $a \equiv b$ (fig. 5.20a) ose të dy drejtëzat shtrihen në të njëjtin rrafsh dhe ato nuk priten. Pra $a \cap b = \emptyset$ (fig. 5.20b).



Fig. 5.20 a

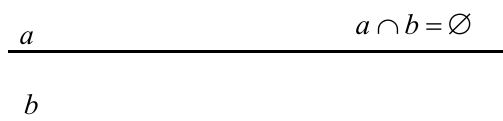


Fig. 5.20 b

Aksioma 7. (Aksioma e paraleleve). Për çdo drejtëz a dhe një pikë A ekziston një drejtëz e vetme b , e cila e përmban pikën A dhe është paralele me drejtëzën a (fig. 5.21).

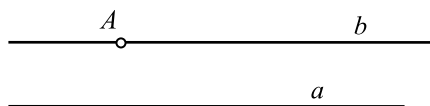


Fig. 5.21

Sipas përkufizimit 5, dallojmë dy raste: pika $A \in a$ dhe $A \notin a$. Në rastin e parë drejtëza b është vetë drejtëza a . Në rastin e dytë, drejtëza a dhe pika A përcaktojnë një rrafsh të vetëm, dhe në këtë rrafsh, sipas aksiomës 7, ekziston një drejtëz e vetme b , e cila kalon nëpër pikën A dhe $a \cap b = \emptyset$ (fig. 5.21). Është evidente se ka vend ky pohim:

Le të jenë m, n dhe p tri drejtëza të një rrafshi α . Nëse drejtëzat m dhe n janë paralele mes veti dhe nëse drejtëza p e pret njërin prej tyre, atëherë ajo e pret edhe tjetrën (fig. 5.22).

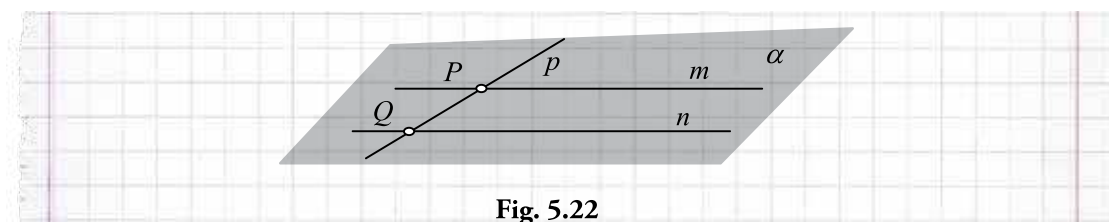


Fig. 5.22

Në vazhdim do të shohim raportin mes drejtëzave dhe rrafshëve dhe disa kuptime të këtyre objekteve në hapësirë. Vlejnjë këto pohime:

Nëse drejtëzat p dhe q priten dhe janë paralele me rrafshin α , ato përcaktojnë një rrafsh të vetëm β , i cili është paralel me rrafshin α (fig. 5.23).

Nëpër pikën e dhënë B jashtë rrafshit të dhënë α kalon saktësisht një rrafsh β , i cili është paralel me rrafshin α (fig. 5.24).

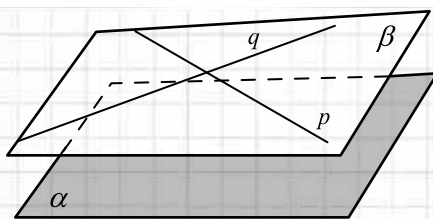


Fig. 5.23

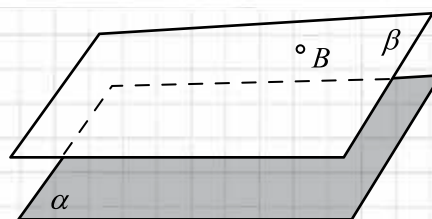


Fig. 5.24

Nëse drejtëza b është paralel me rrafshin e dhënë α , atëherë ekziston një rrafsh i vetëm β , i cili e përmban drejtëzën b dhe është paralel me rrafshin α (fig. 5.25).

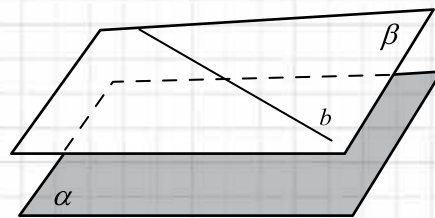


Fig. 5.25

SHENBULLI 3.

Sa rrafshë më së shumti mund të formojnë dy drejtëza paralele a dhe b dhe pika M , e cila nuk i takon asnjërës prej drejtëzave?

ZGHIDHJE

Drejtëzat paralele (nëse janë të ndryshme) përcaktojnë një rrafsh të vetëm. Secila nga dy drejtëzat a, b me pikën M përcaktojnë nga një rrafsh, prandaj gjithsej kemi tre rrafshë.

Në vazhdim do të përkufizojmë segmentin të përcaktuar nga dy pika të një drejtëze të dhënë.

Përkufizim 6. Segment të përcaktuar nga dy pika A dhe B të një drejtëze p quajmë bashkësinë e të gjitha pikave të drejtëzës p të cilat ndodhen ndërmjet pikave A dhe B duke i përfshirë edhe pikat A e B .

Segmentin e përcaktuar nga pikat A dhe B , simbolikisht e shënojmë me $[AB]$. Pikat A dhe B i quajmë *skaje* të segmentit (fig. 5.26). Pra:

$$[AB] = \{X : X \in p \text{ dhe } (A - X - B)\} \cup \{A, B\}.$$

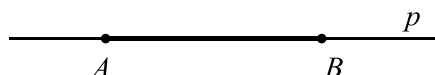


Fig. 5.26

Edhe segmenti, sikurse drejtëza dhe rrafshi, përmban pafund shumë pika. Duke pasur parasysh vërejtjen e mësipërme, përfundojmë se segmenti është një bashkësi e pafundme pikash.

Me ndihmën e këtyre aksiomave, tani jemi në gjendje të përkufizojmë relacionin: *ndodhet nga e njëjta anë e pikës*, në bashkësinë e pikave të një drejtëze, respektivisht: *ndodhet nga e njëjta anë e drejtëzës*, në bashkësinë e pikave të një rrafshi.

Le të jetë dhënë drejtëza a dhe pika $A \in a$. Marrim këtë përkufizim:

Përkufizim 7. Për pikën C të drejtëzës a themi se *ndodhet nga e njëjta anë e pikës A nga e cila ndodhet pika B* , nëse nuk vlen renditja $(B - A - C)$. Në të kundërtën do të themi se ato ndodhen në anë të ndryshme të pikës A (fig. 5.27).

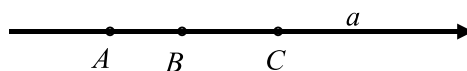


Fig. 5.27

Përkufizim 8. Bashkësinë e të gjitha pikave të drejtëzës a të cilat ndodhen në të njëjtën anë të pikës A , duke e përfshirë edhe vetë pikën A , e quajmë *gjysmëdrejtëz me fillim në pikën A* (fig. 5.27).

Kështu, me ndihmën e këtij përkufizimi përfundojmë se çdo pikë e drejtëzës e ndanë drejtëzën në dy gjysmëdrejtëza të ndryshme.

5.5. Këndet dhe llojet e tyre. drejtëzat normale

Në vazhdim do të japim përkufizimin e këndit, që paraqet një tjetër figurë të rëndësishme në gjeometri. Në rrafshin α le të jenë dhënë dy gjysmëdrejtëza a dhe b me fillim të përbashkët në pikën O .

Përkufizim 9. Unionin e këtyre dy gjysmëdrejtëzave a dhe b e quajmë vijë këndore (kënd) me kulm në pikën O dhe simbolikisht e shënojmë me $\angle aOb$. Gjysmëdrejtëzat a dhe b i quajmë krahë të vijës këndore (fig. 5.28). Pra $\angle aOb = a \cup b$

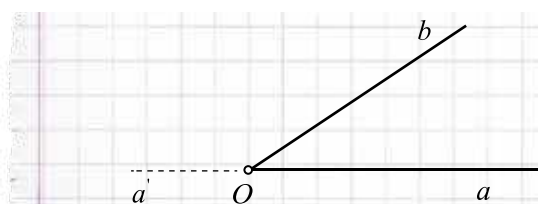


Fig. 5.28

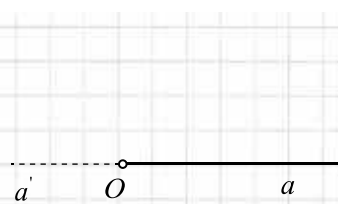


Fig. 5.29

Shënim: Këtu duhet pasur kujdes se vija këndore është figurë gjeometrike. Me fjalë të tjera, vija këndore është një bashkësi e pafundme pikash dhe nuk duhet ngatërruar me masën e këndit. Po ashtu vlen:

$$\angle aOb = \angle bOa.$$

Më parë kemi vërejtur se çdo pikë e drejtëzës e ndanë drejtëzën e dhënë në dy gjysmëdrejtëza të cilat kanë fillim të përbashkët dhe të cilat do t'i shënojmë me a dhe a' . Në bazë të kësaj, krahas këndit $\angle aOb$, mund të konsiderojmë edhe këndin tjetër $\angle a'Ob$ të formuar nga gjysmëdrejtëzat a' dhe b . Këtë kënd e quajmë kënd të përbriçshëm të këndit $\angle aOb$ (fig. 5.28). Kurse këndin $\angle aOa'$ do ta quajmë kënd të shtrirë (fig. 5.29).

Vërejmë se çdo kënd $\angle aOb \subset \alpha$, në rastin e përgjithshëm, e ndanë bashkësinë e pikave të rrafshit α në tri nënbashkësi disjunkte:

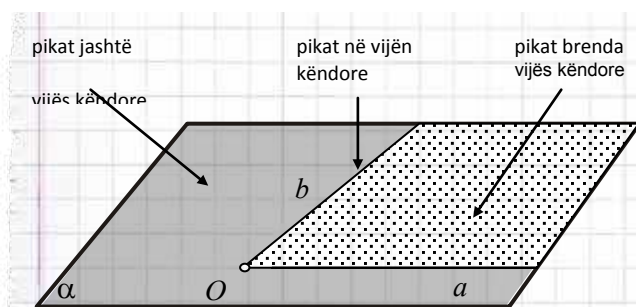


Fig. 5.30

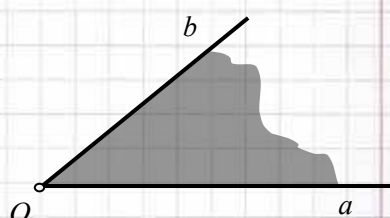


Fig. 5.31

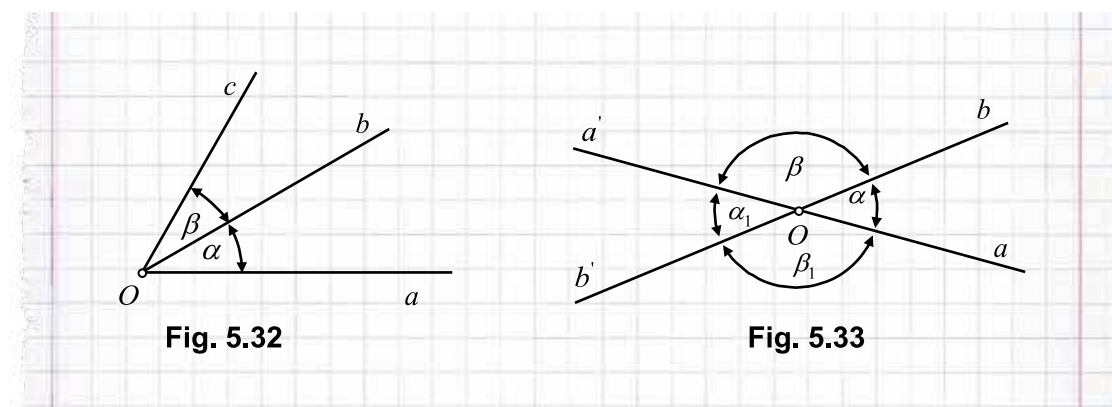
Bashkësinë e pikave të cilat ndodhen brenda vijës këndore $\angle aOb$,

Bashkësinë e pikave të vetë vijës këndore $\angle aOb$ dhe

Bashkësinë e pikave të cilat ndodhen jashtë vijës këndore $\angle aOb$ (fig. 5.30).

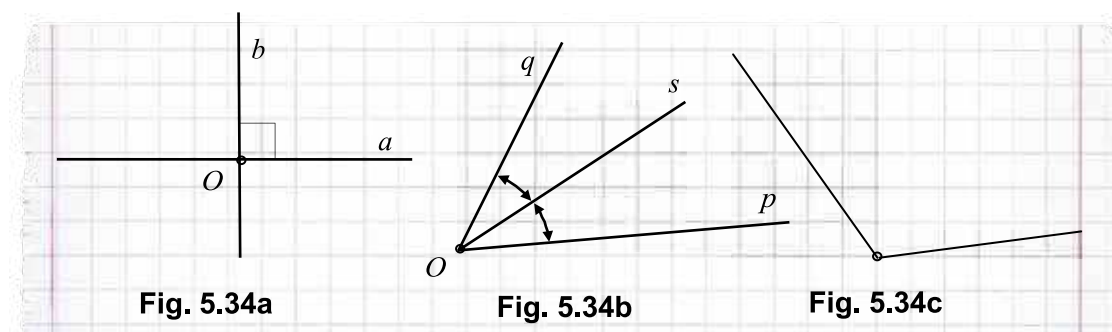
Nga këto tri bashkësi pikash (zonash) çdo herë bashkësia e parë është konvekse. Prandaj unionin e vijës këndore $\angle aOb$ me bashkësinë e pikave të brendshme të tij e quajmë *sipërfaqe këndore* (fig. 5.31).

Përkufizim 10. Për dy kënde, të të njëjtit rrafsh, themi se janë fqinjë nëse ato dy kënde kanë një krah të përbashkët, ndërsa krahu tjetër i njërit nuk guxon të përmbahet në brendinë e tjetrit (fig. 5.32).



Përkufizim 11. Për dy kënde, të cilat shtrihen në të njëjtin rrafsh, themi se janë kryqëzore nëse ato dy kënde nuk janë fqinjë, kanë kulm të përbashkët dhe formohen gjatë prerjes së dy drejtëzave të po atij rrafshi (fig. 5.33).

Përkufizim 12. Për dy drejtëza a dhe b që priten themi se janë normale në njëra-tjetrën nëse ato gjatë prerjes së tyre formojnë katër kënde kongruente (të barabarta). Simbolikisht shkruajmë: $a \perp b$ (fig. 5.34a). Secilin prej atyre këndëve e quajmë të drejtë.



Kështu, për masë të këndeve merret shkalla (1°), në atë mënyrë që këndit të drejtë i shoqërohet masa prej 90° .

Në bazë të kësaj, këndet i klasifikojmë në:

1. Kënde të ngushta, masa e të cilëve është më e vogël se 90° (fig. 5.34b).
2. Kënde të drejta, masa e të cilëve është e barabartë me 90° (fig. 5.34a).
3. Kënde të gjera, masa e të cilëve është më e madhe se 90° dhe më e vogël se 180° (fig. 5.34c).
4. Kënde të shtrirë, masa e të cilëve është e barabartë me 180° (fig. 5.28).
5. Kënde të plotëta, masa e të cilëve është e barabartë me 360° .

Kemi edhe njësitë më të vogla se shkalla ($^{\circ}$), *minuta* ($'$) dhe *sekonda* ($''$). Raporti mes tyre është:
 $1^{\circ} = 60'$, $1' = 60''$.

Simetrale të segmentit $[AB]$ quajmë drejtëzën s e cila është normale në drejtëzën AB dhe e përgjysmon segmentin $[AB]$ (fig. 5.35). Pikëprerja S e drejtëzës s me segmentin $[AB]$ e quajmë *mes* të segmentit. Simetralja dhe mesi i segmentit janë të përcaktuar në mënyrë unike.

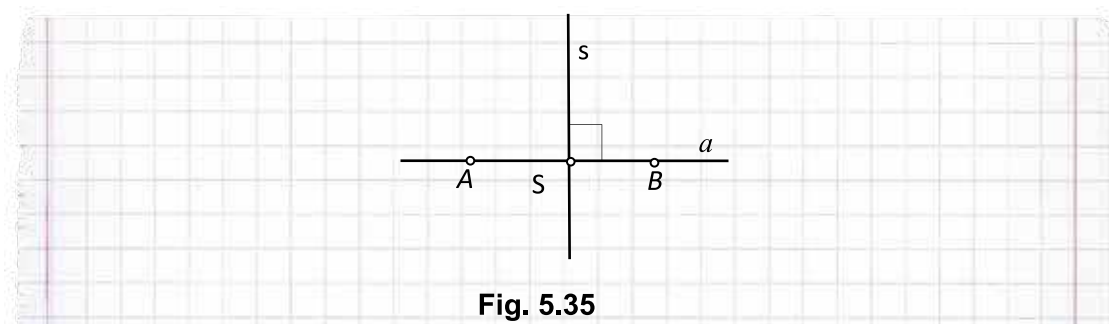


Fig. 5.35

5.6. Vija e thyer në rrafsh të. Shumëkëndëshat

Në vazhdim do të japim përkufizimin e *vijës së thyer në rrafsh*.

Përkufizim 13. Le të jenë $A_1, A_2, \dots, A_n$, për $n > 2$ pika të një rrafshi, ashtu që asnjë treshe pikash fqinje (të njëpasnjëshme) nuk i takojnë një drejtëze. Unionin e segmenteve $[A_1 A_2], [A_2 A_3], \dots, [A_{n-1} A_n]$ e quajmë *vijë të thyer të rrafsh të (poligonale)* dhe simbolikisht e shënojmë me $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n$ (fig. 5.36). Nëse $n \geq 3$ dhe $A_n \equiv A_1$, ndërsa pikat A_n, A_1, A_2 nuk janë kolineare, atëherë vijën e thyer dhe të rrafsh të e quajmë të mbyllur (fig. 5.37). Çdo vijë të thyer dhe të mbyllur e quajmë shumëkëndësh.

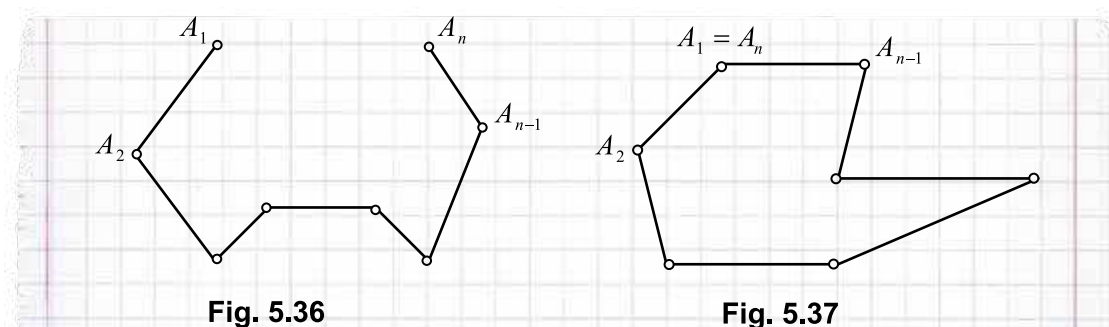


Fig. 5.36

Fig. 5.37

Përkufizim 14. Unioni i një vije të mbyllur poligonale me pikat e brendshme të saj e quajmë *sipërfaqe poligonale* (fig. 5.38).

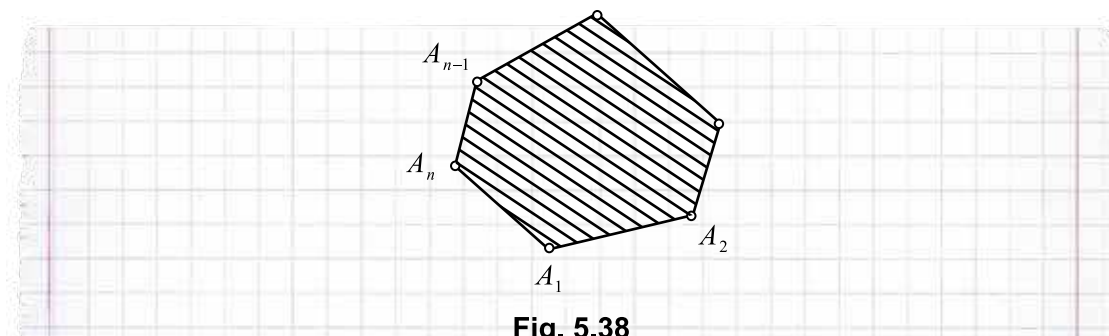


Fig. 5.38

Varësisht nga numri i kulmeve do të dallojmë sipërfaqe trekëndëshe, katërkëndëshe, pesëkëndëshe etj. Segmentet e përcaktuara nga cilat do dy kulme fqinje i quajmë *brinjë*, ndërsa segmentet e përcaktuara nga cilat do dy kulme jofqinje i quajmë *diagonale*, si dhe këndet $\angle A_i A_{i+1} A_{i+2}$, $\angle A_{n-1} A_n A_1$, ($i = 1, 2, \dots, n-2$) quhen *këndet e brendshme* të sipërfaqes poligonale. Këndet e përbrijshe të këndeve të brendshme të një sipërfaqe poligonale quhen *kënde të jashtme të saj*. Rëndësia e tyre është shumë e madhe, sepse në këtë mënyrë ka kuptim të flasim për syprinën (nëse ajo ekziston) e sipërfaqes së një figure të rrafshët.

5.6.1 Trekëndëshi

Përkufizim 15. Unionin e segmenteve $[AB]$, $[BC]$ dhe $[CA]$ e quajmë *trekëndësh*. Pikat A, B dhe C i quajmë *kulme të trekëndëshit*, kurse segmentet $[AB]$, $[BC]$ dhe $[CA]$ i quajmë *brinjë të trekëndëshit*. (fig. 5.39).

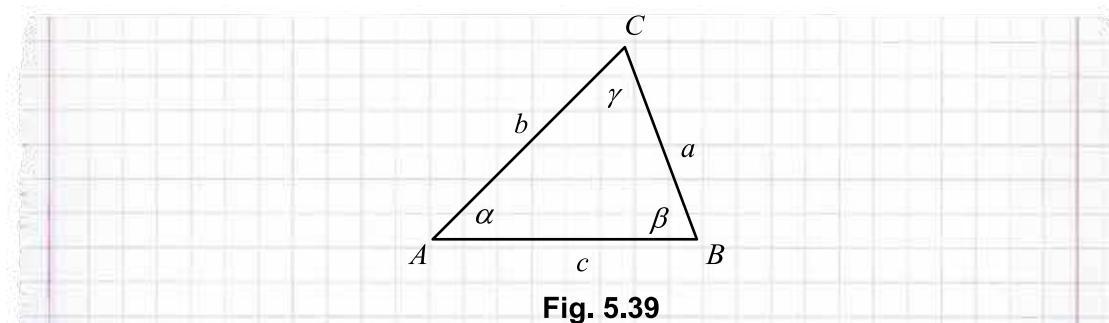


Fig. 5.39

Me a, b dhe c kemi shënuar gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit, kurse me α, β dhe γ kemi shënuar masat e këndeve të brendshme të trekëndëshit ABC te kulmet A, B dhe C respektivisht. Unionin e trekëndëshit (vijës trekëndëshe) me bashkësinë e pikave të brendshme të tij e quajmë *sipërfaqe trekëndëshe* (fig. 5.40).

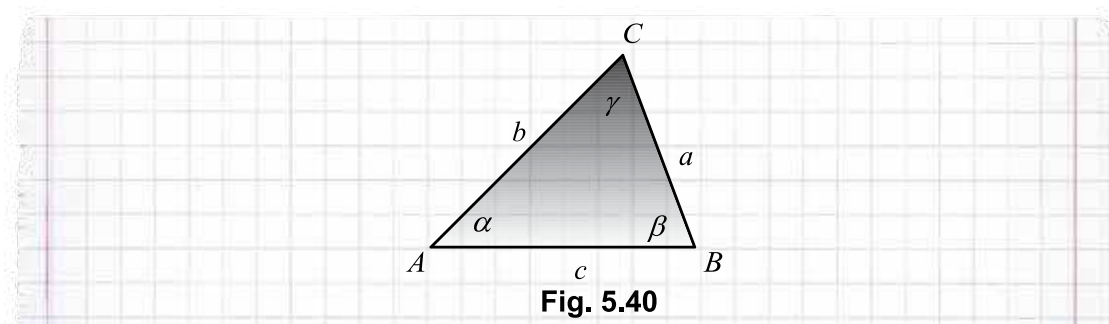


Fig. 5.40

Dallojmë trekëndësha brinjëndryshëm (të gjitha brinjët janë dy nga dy të ndryshme (fig. 5.43)), barakrahës (dy brinjë i ka të barabarta (fig. 5.41a) ($|AC| = |BC|$)) dhe barabrinjës (të gjitha brinjët i ka të barabarta (fig. 5.41b)), ku me $|AC|$ kemi shënuar gjatësinë e segmentit $[AC]$.

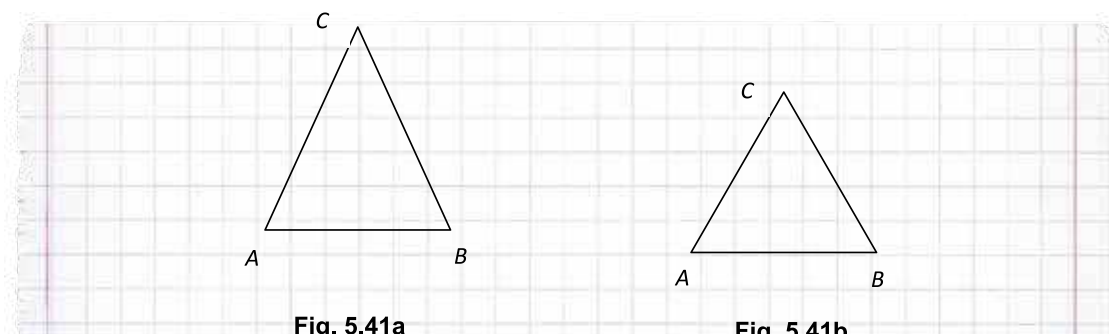


Fig. 5.41a

Fig. 5.41b

Brinja $[AB]$ e trekëndëshit barakrahës quhet *bazë*, kurse dy brinjët e tjera quhen *krabë*. Këndët te kulmet A dhe B të trekëndëshit barakrahës janë të barabartë. Te trekëndëshi barabrinjës të gjitha këndet e brendshme masën e kanë 60° .

Sa i përket këndeve të brendshme të trekëndëshit, dallojmë trekëndësha këndngushtë (fig. 5.40), kënddrejtë (fig. 5.42) dhe këndgjerë (fig. 5.43).

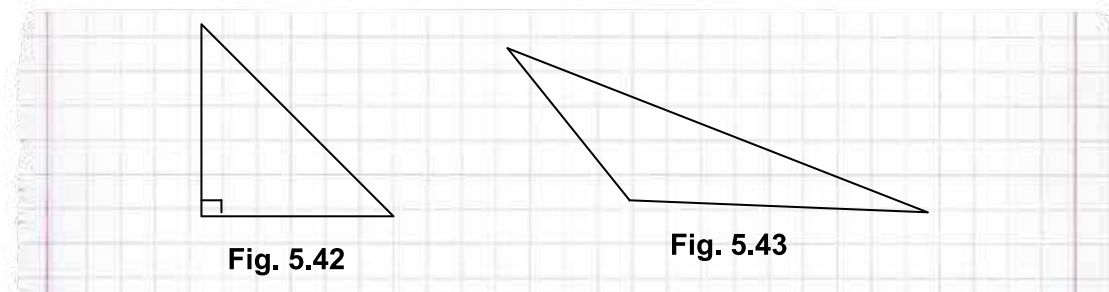


Fig. 5.42

Fig. 5.43

Te çdo trekëndësh, shuma e gjatësive të dy brinjëve është më e madhe se gjatësia e brinjës së tretë, kurse ndryshimi i gjatësive të cilave do dy brinjë është më e vogël se gjatësia e brinjës së tretë. Po ashtu shuma e masave të këndeve të brendshme të çdo trekëndëshi është e barabartë me 180° .

5.6.2. Katërkëndëshi dhe llojet e tij

Ngjashëm, sikur për rastin e trekëndëshit, përkufizohet katërkëndëshi i përcaktuar nga pikat A,B,C dhe D, ashtu që asnjë treshe prej tyre nuk i takon një drejtëze, si union i segmenteve $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ dhe $[DA]$ (fig. 5.44). Secili prej segmenteve $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ dhe $[DA]$ quhet *brinjë* e katërkëndëshit, kurse segmentet që formohen nga kulmet e përballshme $[AC]$, $[BD]$ të katërkëndëshit quhen *diagonale*.

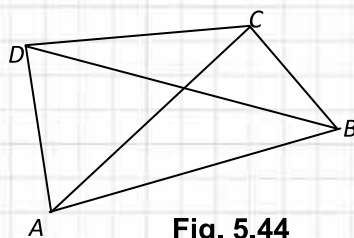


Fig. 5.44

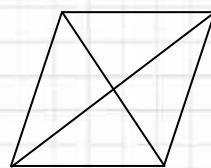


Fig. 5.45



Fig. 5.46

Përkufizim 16. Katërkëndëshi te i cili një çift brinjësh të përballshme janë paralele quhet trapez (fig. 5.46). Katërkëndëshi te i cili dy nga dy brinjët e përballshme janë paralele quhet paralelogram (fig. 5.45). Paralelogrami, i cili i ka të gjitha këndet e brendshme të drejta quhet drejtëkëndësh (fig. 5.47). Drejtëkëndëshi, i cili i ka të gjitha brinjët e barabarta quhet katror (fig. 5.48). Paralelogrami i cili i ka të gjitha brinjët e barabarta quhet romb (fig. 5.49).

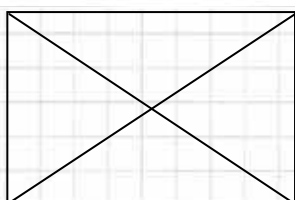


Fig. 5.47

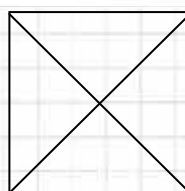


Fig. 5.48

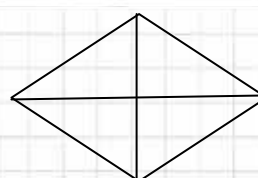


Fig. 5.49

Veti kryesore e çdo paralelogrami është se brinjët e përballshme si dhe këndet e përballshme janë të barabarta, kurse diagonalet priten dhe përgjysmohen. Vetë kryesore e drejtëkëndëshit është se diagonalet i ka të barabarta, kurse katrori i ka diagonalet e barabarta dhe normale në njëra-tjetrën. Në fund, diagonalet e rombit janë reciprokisht normale. Sipas kësaj, çdo katror është edhe romb, çdo romb është edhe paralelogram, çdo paralelogram është trapez dhe çdo trapez është katërkëndësh, por e anasjellta nuk vlen. Po ashtu, çdo katror është edhe drejtëkëndësh, çdo drejtëkëndësh është edhe paralelogram, çdo paralelogram është trapez dhe çdo trapez është katërkëndësh, por e anasjellta nuk vlen.

5.6.3. Simetria boshtore

Le të jetë dhënë një drejtëz s në rrafshin α dhe pika $A \in \alpha$. Do të themi se pika $B \in \alpha$ është pikë *simetrike* me pikën A ndaj drejtëzës s , nëse drejtëza s është simetrale e segmentit $[AB]$ (fig. 5.50). Kurse për dy figura F_1 dhe F_2 themi se janë *simetrike me njëra-tjetrën* ndaj një drejtëze s nëse për çdo pikë të njërës, pika simetrike e saj ndaj drejtëzës s i takon figurës tjetër (fig. 5.51).

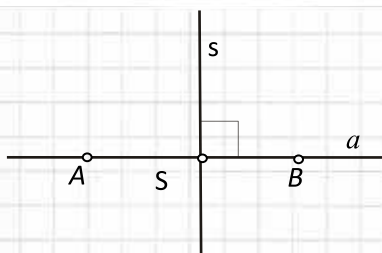


Fig. 5.50

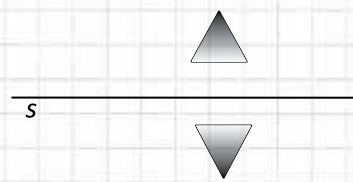


Fig. 5.51

Për një figurë të rrafshhtë F themi se ka *bosht të simetrisë* drejtëzën s nëse për çdo pikë të figurës F , edhe pika simetrike ndaj drejtëzës s prap i takon figurës F (fig. 5.52, fig. 5.53).

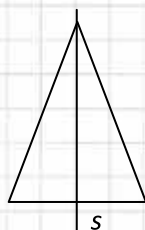


Fig. 5.52

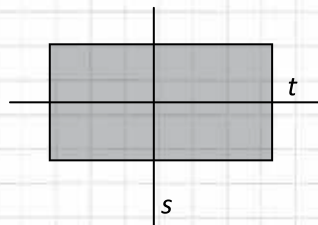


Fig. 5.53

Figura e sipërfaqes drejtkëndëshe në fig. 5.58, tregon se kemi figura të cilat kanë më shumë se një bosht të simetrisë, por kemi edhe figura të cilat nuk kanë asnjë bosht të simetrisë, p.sh. trekëndëshi brinjëndryshëm (fig. 5.54), apo figura tjera të parregullta.



Fig. 5.54

SHENBULLI 4.

Të vizatohen boshtet e simetrisë për katrorin, trekëndëshin barabrinjës dhe rombin. Nga sa boshte të simetrisë kanë secila nga këto figura?

Rez. Katrori ka 4 boshte të simetrisë, trekëndëshi barabrinjës ka tri, kurse rombi ka dy boshte të simetrisë të cilat janë reciprokisht normale (diagonalet e rombit).

Nëse figura e rrafshët ka saktësisht dy boshte të simetrisë, atëherë ato janë reciprokisht normale.

5.6.4. Rrethi

Në vazhdim do të japim përkufizimin e rrethit.

Përkufizim 17. Bashkësinë e të gjitha pikave në rrafsh të cilat janë njësoj të larguara nga një pikë e fiksuar O e quajmë rreth. Pikën e fiksuar O e quajmë qendër të rrethit, ndërsa largesën r të cilës do pikë të rrethit nga qendra e tij e quajmë rreze të rrethit (fig. 5.55).

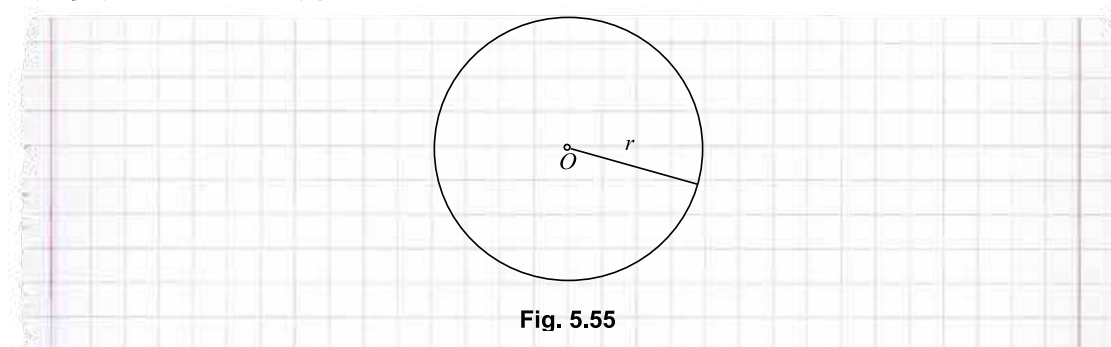


Fig. 5.55

Nëse me $l(O, r)$ shënojmë rrethin me qendër në pikën O dhe rreze $r > 0$, kurse me $|OM|$ gjatësinë e segmentit $[OM]$, atëherë:

$$l(O, r) = \{M \in \alpha = E^2 : |OM| = r\},$$

ku me E^2 kemi shënuar rrafshin α .

Kështu, rrethin duhet kuptuar si bashkësi e pikave të rrafshit që janë njëloj të larguara nga një pikë e fiksuar. D.m.th. rrethi është një vijë e mbyllur e rrafshit. Në këtë mënyrë rrethi e ndanë rrafshin në tri klasë disjunkte të pikave: pikat të cilat ndodhen brenda rrethit ($|OM| < r$), pikat të rrethit ($|OM| = r$), dhe në bashkësinë e pikave të cilat ndodhen jashtë rrethit ($|OM| > r$). Marrim këtë përkufizim:

Përkufizim 18. Le të jetë $r > 0$ dhe O një pikë e fiksuar e rrafshit. Bashkësinë e të gjitha pikave në rrafsh largesat e të cilave është më e vogël ose e barabartë me numrin r e quajmë qark rrethor. Pikën e fiksuar O e quajmë qendër të qarkut, ndërsa numrin pozitiv r e quajmë rreze të qarkut (fig. 5.56).

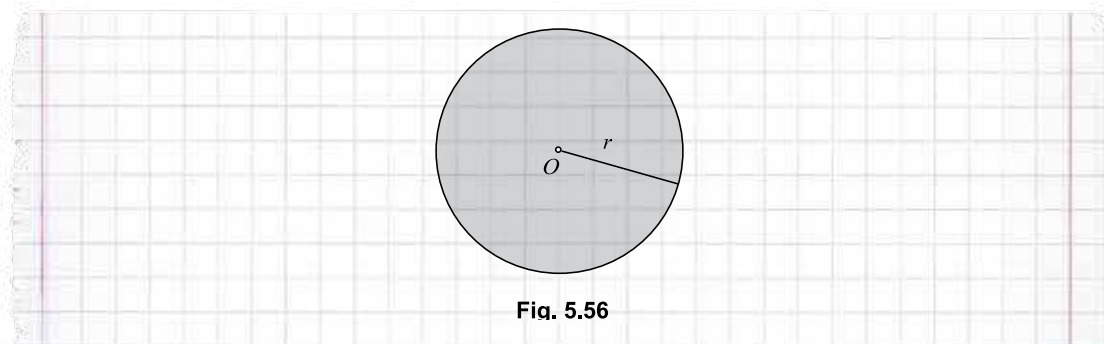


Fig. 5.56

Me ndihmën e bashkësive, qarkun (rruzullin) do të shkruanim si:

$$I(O, r) = \{M \in \alpha = E^2 : |OM| \leq r\}.$$

5.6.5. Trupat gjeometrikë

Në vijim do të prezentojmë disa nga trupat gjeometrikë dhe do t'i japi disa nga vetitë kryesore të tyre.

5.6.5.1 Sfera

Përkufizim 19. Bashkësinë e të gjitha pikave në hapësirë të cilat janë njësoj të larguara nga një pikë e fiksuar O e quajmë sferë. Pikën e fiksuar O e quajmë qendër të sferës, ndërsa largesën r të cilës do pikë të sferës nga qendra e saj e quajmë rreze të sferës (fig. 5.57).

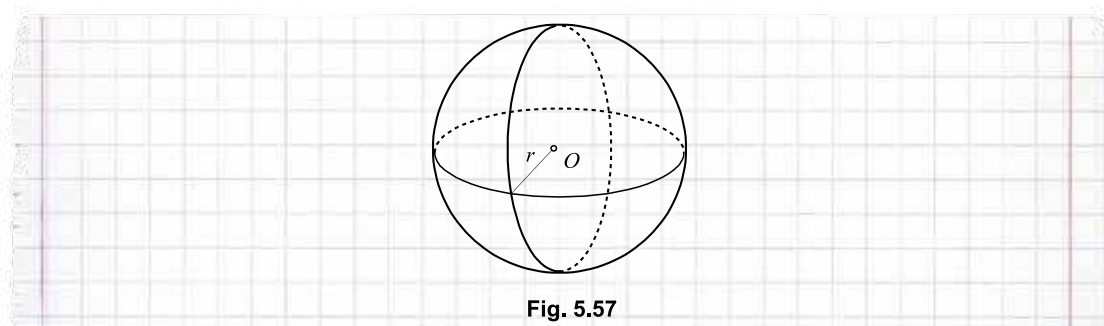


Fig. 5.57

Nëse me $S(O, r)$ shënojmë sferën me qendër në O dhe rreze $r > 0$, atëherë:

$$S(O, r) = \{M \in E^3 : |OM| = r\}.$$

Kështu, sferën duhet kuptuar si bashkësi e pikave të hapësirës që janë njësoj të larguara nga një pikë e fiksuar, d.m.th. sfera është një sipërfaqe e mbyllur e hapësirës. Në këtë mënyrë sfera e ndanë hapësirën në tri bashkësi disjunkte të pikave: pikat të cilat ndodhen brenda sferës ($|OM| < r$), pikat të sferës ($|OM| = r$), dhe në bashkësinë e pikave të cilat ndodhen jashtë sferës ($|OM| > r$). Ngjashëm, si në rastin e qarkut rrethor në rrafsh, përkufizojmë rruzullin në hapësirë.

Përkufizim 20. Le të jetë $r > 0$ dhe O një pikë e fiksuar e hapësirës. Bashkësinë e të gjitha pikave në hapësirë, largesat e të cilave prej pikës O janë më të vogla ose të barabarta me numrin r e quajmë rruzull. Pikën e fiksuar O e quajmë qendër të rruzullit, ndërsa numrin pozitiv r e quajmë rreze të rruzullit (fig. 5.58).

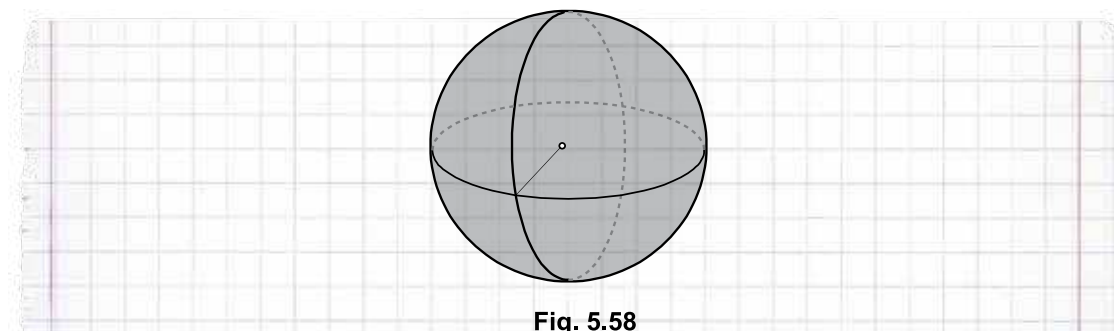


Fig. 5.58

Me ndihmën e bashkësive, rruzullin do të shkruanim si:

$$S(O, r) = \{M \in E^3 : |OM| \leq r\}.$$

5.6.5.2. Kubi dhe Kuboidi

Disa nga trupat e rëndësishëm gjeometrikë janë edhe kubi dhe kuboidi. Secili prej tyre ka 6 faqe, 8 kulme dhe 12 tehe (brinjë) (fig. 5.59).

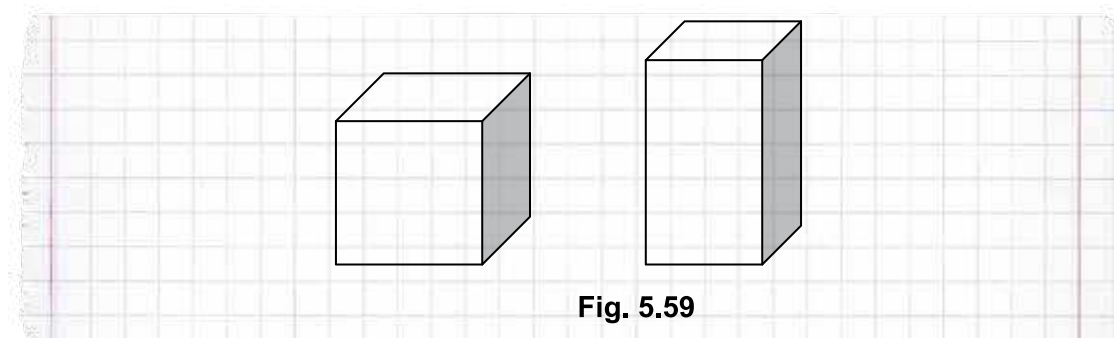


Fig. 5.59

Faqet e kubit janë sipërfaqe katrore, kurse faqet e kuboidit janë sipërfaqe drejtëkëndëshe. Çdo kuboid është edhe kub. E anasjellta nuk vlen.

5.6.5.3. CILINDRI DHE KONI

Trup i rëndësishëm gjeometrik është edhe cilindri, i cili përbëhet prej dy bazave që paraqesin qarqe rrethore dhe mbështjellësit. Te cilindri dallojmë rrezen e bazës dhe lartësinë e cilindrit, që paraqet distancën ndërmjet dy bazave (fig. 5.60a).

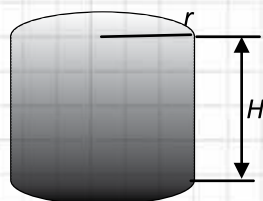


Fig. 5.60a

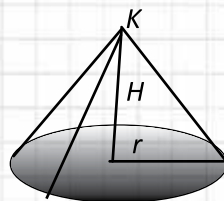


Fig. 5.60b

Edhe te koni, dallojmë bazën dhe mbështjellësin. Baza e konit paraqet një sipërfaqe rrethore që karakterizohet me rrezen r . Edhe te koni kemi lartësinë, që paraqet distancën e kulmit K të konit nga baza e tij (fig. 5.60b).

5.6.5.4. PIRAMIDA

Në fund, kemi edhe piramidën si trup gjeometrik. Ajo përbëhet prej bazës dhe mbështjellësit. Mbështjellësi i piramidës së drejtë përbëhet prej trekëndëshave barakrahësh, të cilët quhen *faqe* të piramidës. Varësisht nga numri i faqeve, piramida quhet trifaqësore, katërfaqësore, etj. (fig. 5.61)

Baza e piramidës mund të jetë një shumëkëndësh (trekëndësh, katërkëndësh, pesëkëndësh, etj.). Është e qartë se sa brinjë t'i ketë baza e piramidës po aq faqe do të ketë ajo. Nëse baza e piramidës është shumëkëndësh i rregullt (trekëndësh barabrinjës, katror, pesëkëndësh i rregullt, etj.), piramida quhet *e rregullt*.

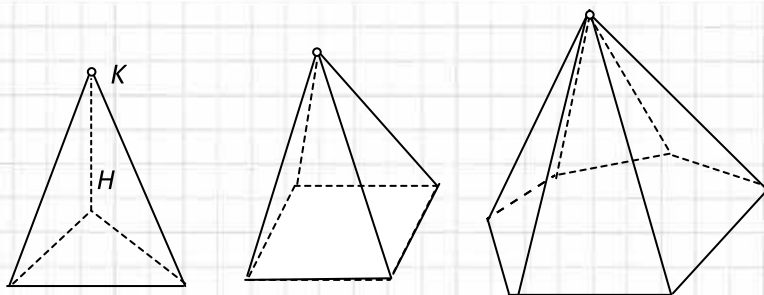


Fig. 5.61

VI. Puna me të dhëna

Në jetën e përditshme, në gazeta, radio, televizione, revista, etj. hasim shembuj të lloj-llojshëm të përfundimeve të nxjerra nga vërtetimet (studimet) e ndonjë dukurie shoqërore, apo natyrore. P.sh. nëse marrim nxënësit e një shkolle në shqyrtim dhe jemi të interesuar në numrin e mungesave të paarsyeshme të nxënësve të asaj shkolle gjatë një gjysmëvjetori, atëherë është shumë normale që lidhur me këtë dukuri të dëgjojmë shprehjet si vijojnë: "...20% e nxënësve të shkollës kanë të paktën 15 mungesa të paarsyeshme", "...40% e nxënësve të shkollës kanë prej 8 deri 14 mungesa të paarsyeshme", "...28% e nxënësve të shkollës kanë prej 4 deri 7 mungesa të paarsyeshme" dhe "...12% e nxënësve të shkollës kanë më pak se 4 mungesa të paarsyeshme". Po ashtu, nëse marrim për shqyrtim vjetërsinë (në vite) të veturave të Kosovës, atëherë është e natyrshme që nga ky studim, të nxjerrim përfundime si në vijim: "...60% e numrit të përgjithshëm të veturave të regjistruara në Republikën e Kosovës janë më të vjetra se 5 vite; 34% ndërmjet 2 e 5 vite dhe 6% më të reja se 2 vite".

Këto paraqesin vetëm dy shembuj të thjeshtë të grumbullimit të të dhënave për një dukuri të caktuar, përpunimit të tyre dhe nxjerrjen e përfundimeve. I tërë ky process emërtohet si *puna me të dhëna*.

Që një vërtetim të jetë i suksesshëm, duhet t'i respektojmë disa rregulla(parime), sipas të cilave kryhet vërtetimi:

1. Së pari caktohet bashkësia e elementeve (populacioni) mbi të cilën do të kryhet vërtetimi.
2. Së dyti përcaktohen vetitë (vetia) të cilat do t'i karakterizojnë elementet e bashkësisë.
3. Së treti bëhet numërimi dhe klasifikimi i elementeve të populacionit sipas vetive të elementeve të pikës 2.
4. Rezultatet e pikës 2 paraqiten në mënyrë tabelare (nëse një gjë e tillë është e mundur).
5. Nxirren rezultate të caktuara lidhur me elementet e bashkësisë dhe vetitë të cilat elementet e bashkësisë i posedojnë.
6. Sipas nevojës, këto rezultate paraqiten edhe në mënyrë grafike (vizuele), duke përdorur diagrame të ndryshme.

6.1 Numërimi dhe klasifikimi i të dhënave

Gjatë një vërtetimi të caktuar, element të rëndësishëm paraqet numërimi i elementeve të populacionit që kanë një veti të caktuar dhe klasifikimi i tyre.

Pika 2 e procedurës së mësipërme na jep mundësinë që lidhur me elementet e një bashkësie, njëkohësisht të shqyrtohen dy apo më shumë veti (karakteristika). Ta ilustrojmë këtë me disa shembuj.

SHEMBULLI 1.

Mësuesja Vlorë, pasi përfundoi të gjitha notat e nxënësve në klasën e saj, ajo hartoi një pasqyrë më të përmbledhur lidhur me numrin e nxënësve të klasës së saj, të cilët kaluan me sukses: të shkëlqyeshëm, shumë mirë, mirë, mjaftueshëm dhe të pamjaftueshëm. Klasa e mësueses Vlorë kishte 30 nxënës. Si veproi mësuesja Vlorë për të zgjidhur këtë vërtetim?

! ZGHIDHJE

Së pari ajo ndërtoi një tabelë me 6 shtylla, pesë prej të cilave ishin të rezervuara për evidentimin e rezultateve gjatë leximit të suksesit të nxënësve nga numri rendor 1, i ditarit të klasës, deri te numri 30. P.sh. nëse nxënësi me numrin rendor 1 ka pasë sukses të shkëlqyeshëm, ajo në shtyllën, sipër së cilës është vendosur numri 5, vendosi një vizë vertikale. Nëse nxënësi me numrin rendor 2 ka pasë sukses shumë të mirë, në shtyllën e tabelës ku figuron numri 4 vendosi një vizë vertikale dhe ajo vazhdoi duke vendosur viza vertikale nëpër shtyllat e tabelës derisa ajo përfundoi së lexuari suksesin e secilit nxënësi. Që numërimi i nxënësve të klasës të klasifikuar sipas suksesit të jetë më i lehtë, ajo vendosi të formojë grupe me nga 5 viza vertikale (ose pasi të bëhen 4 viza vertikale për një notë të caktuar, viza e pestë (||||) të vendoset tërthorazi sipër katër të parave) (tab. 6.1). Këto grupe me nga pesë viza, pastaj u vendosën njëri pranë tjetrit, por me një distancë të vogël ndërmjet tyre, në mënyrë që numërimi i tyre të jetë më i lehtë. Grupi i fundit i vizave nuk është e thënë që të përbëhet saktësisht prej pesë vizave. Kjo mënyrë e numërimit të nxënësve të klasës dhe klasifikimi i menjëhershëm në tablën e suksesit është shumë e shpejtë dhe shumë efikase, sepse vetëm njëherë duhet t'i shfletojmë faqet e ditarit ku është regjistruar sukseesi i çdo nxënësi.

Kjo metodë e numërimit të elementeve të një bashkësie të cilët kanë një veti të caktuar, përdoret me të madhe në praktikë. P.sh. numërimi i votave të kandidatëve të propozuar për një post të caktuar gjatë një procesi zgjedhor; numri i produkteve të një prodhimi, të cilët nuk i plotësojnë standardet, etj.

SUKSESI	5	4	3	2	1	Gjithsej
NUMRI I NX.						30
GJITHSEJ	4	5	12	6	3	30

Tab. 6.1

Të dhënat në tablën 6.1 paraqesin një pasqyrë të përmblëdhur të suksesit të nxënësve të klasës së mësueses Vlorë.

6.2 Paraqitja e të dhënave në mënyrë grafike (me diagrame)

Paraqitja e të dhënave në mënyrë grafike, pra me ndihmën e diagrameve, e lehtëson dukshëm leximin e rezultateve të vërtetimit. Ta ilustrujmë këtë me një shembull.

! SHEMBULLI 2.

Mësuesja Vlorë, nuk u ndal vetëm me paraqitjen tabelare (tab. 6.1) të suksesit të klasës së saj, por ajo vazhdoi edhe më tej, duke përdorur metodën grafike për të pasqyruar suksesin e nxënësve të saj në mënyrë vizuale. Ajo u përcaktua për diagramin në formë të drejtkëndshave, (fig. 6.1).

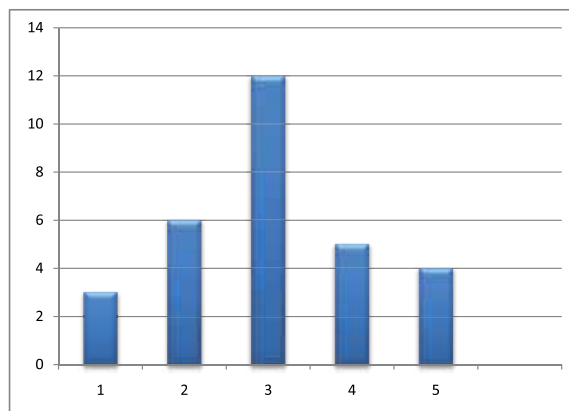


Fig.6.1

Është e evidente se nga ky diagram mund të lexojmë në mënyrë të saktë se sa nxënës të klasës kanë kaluar me suksese të shkëlqyeshëm, sa me sukses shumë të mirë, e kështu me radhë.

SUKSESI	5		4		3		2		1		Gjithsej
GJINIA	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	
NUMRI I NX.	2	2	3	2	5	7	3	3	2	1	
GJITHSEJ	4		5		12		6		3		30

Tab. 6.2

Ndonjëherë, gjatë vërtimit nuk është e domosdoshme që të fokusohemi vetëm në një veti të elementeve të popullacionit, por mund të kemi në shqyrtim më shumë veti. P.sh. nëse gjatë vërtimit të suksesit të nxënësve të klasës, përveç suksesit të nxënësit jemi të interesuar që të vërtetojmë edhe gjininë e tij, atëherë kjo gjë mund të bëhet pa ndonjë vështirësi. Si? Nëse marrim në shqyrtim vetëm nxënës të cilët kanë kaluar me sukses të shkëlqyeshëm, atëherë shtyllën e rezervuar për këtë sukses e ndajmë në dy nënshtylla M dhe F, secila prej tyre është e rezervuar për të evidentuar numrin e nxënësve të shkëlqyeshëm sipas gjinisë. P.sh. nëse nga gjithsej 4 nxënës të shkëlqyeshëm, 2 janë djem dhe 2 janë vajza, atëherë në shtyllën me shkronjën M vendosim numrin 2. Njësoj veprojmë edhe me shtyllën me shkronjën F. Ky proces përsëritet edhe për notat e tjera.

Kështu, diagrami korrespondues për këto të dhëna do të jetë si në fig. 6.2.

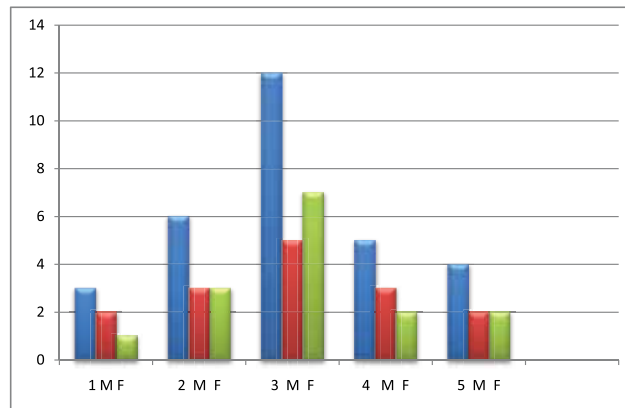


Fig.6.2

Nga ky shembull vërejmë se në një diagram mund të paraqiten më shumë se një veti të një popullacioni.

Format e diagrameve për të pasqyruar një apo më shumë veti mbi një popullacion janë të shumta. Dy diagramet e mësipërme janë të formës së drejtkëndshave, kurse diagrami në formë të paralelopipedeve (kuadrave) që pasqyron vrojtimin e njëjtë si të atë të mësipërmin do të dukej:

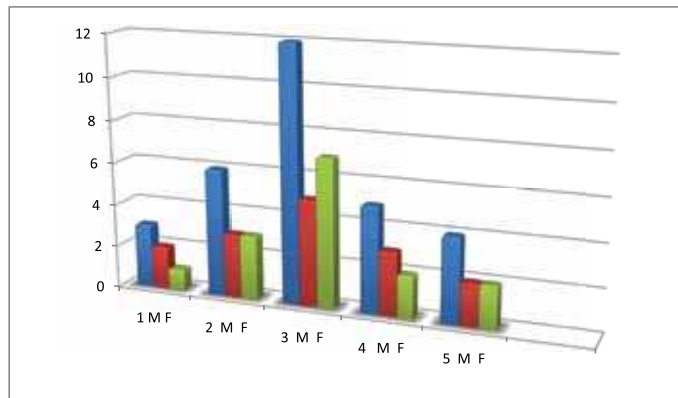


Fig.6.3

Ose në formë të cilindrave:

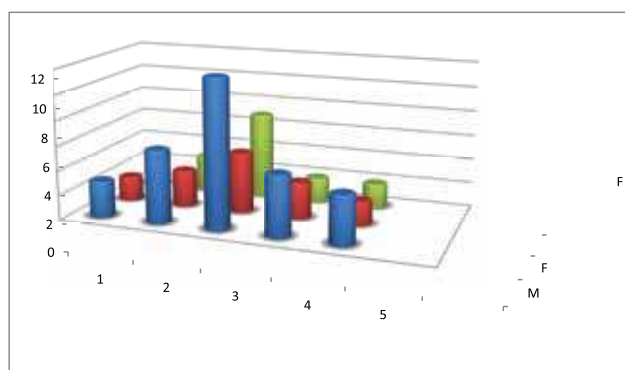


Fig.6.4

Meqenëse puna me të dhëna fillon që nga klasa e tretë, atëherë mjafton që nxënësit e klasës së tretë të jenë në gjendje që për një dukuri të caktuar që ndërlidhet me një populacion:

1. Të bëjnë grumbullimin dhe numërimin e të dhënave,
2. T'i ndajnë ato sipas vetive (atributeve) të elementeve të populacionit dhe
3. T'i paraqesin grafikisht rezultatet e vërtetimit, duke përdorur ndonjërin prej diagrameve që i përshkruam më sipër.
4. Të bëjnë leximin e rezultateve, kur ato janë dhënë në mënyrë tabelare apo grafike.

SHËMBULLI 3.

Mësuesja Vlorë, në orën e saj mësimore që për temë shtjellimi kishte punën me të dhëna, ajo kishte përgatitur 30 fletëza (pytësorë) (sa numri i nxënësve në klasën e saj) dhe për objekt studimi (vërtetimi) kishte përqimimin e dy pemëve: bananes dhe mollës nga nxënësit e saj. Në secilën fletëz ajo kishte shkruar pyetjen:

Cila nga pemët u pëlqen më së shumti?

- a. Banana
- b. Molla
- c. Të dy pemët

Ajo i udhëzoi nxënësit që të përgjigjen duke rrethuar vetëm njërin prej alternativave (edhe në rastin kur atyre nuk u pëlqen asnjëra nga pemët), ajo në tabelën e klasës vizatoi një tabelë si në vijim:

	P E M Ë T			GJITHSEJ
	Banania	Molla	Banania dhe molla	
Nurmi i nx.				

Tab. 6.3

Dhe pastaj dy nxënës të klasës bënë leximin dhe numërimin e rezultateve të vërtetimit duke vendosur nga një vizë vertikale në secilën prej kolonave 1-3 të tabelës, varësisht nga përgjigja.

	P E M Ë T			GJITHSEJ
	Banania	Molla	Banania dhe molla	
Nurmi i nx.				30

Tab. 6.4

Në fund, rreshti i fundit i tabelës së fundit plotësohet me vlerat numerike përkatëse.

	P E M Ë T			GJITHSEJ
	Banana	Molla	Banana dhe molla	
Nurmi i nx.	11	9	10	30

Tab. 6.5

Dhe pastaj këto të dhëna tabelare paraqiten në formë grafike, duke përdorur ndonjërin prej diagrameve të përmenduar më sipër.

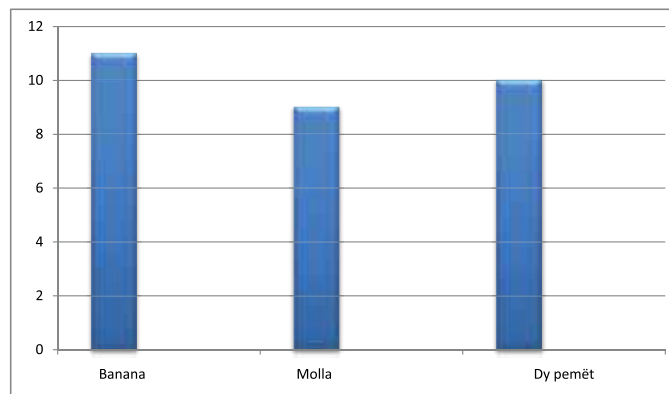


Fig.6.5

Mësuesja Vlorë vazhdoi me shembullin e vrojtimit të mësipërm, i cili përveç numri të nxënësve të klasës të cilët e pëlqejnë një pemë të caktuar, ajo dëshironte të dinte edhe gjininë e nxënësit, i cili e pëlqente pemën e caktuar. Ajo, për të marrë këto informata hartoi pyetësorë të formës:

JU LUTEM PËRGJIGJUNI DUKE RRETHUAR VETËM NJËRËN NGA PËRGJIGJET E OFRUARA

Gjinia e të anketuarit
a) M b) F

Pema e preferuar
a) Banania
b) Molla
c) Të dy pemët

Ajo u sqaroi nxënësve se në këtë pyetësor janë të përfshira dy pyetje, të cilave duhet t'u përgjigjeni duke rrethuar vetëm njërën nga përgjigjet e ofruara. Në vazhdim, ajo vizatoi tabelën, e cila kishte më shumë shtylla se ajo e shembullit paraprak dhe pastaj filloi numërimi i rezultateve të vrojtimit (anketimit).

P E M Ë T							
	Banania		Molla		Banania dhe molla		
	M	F	M	F	M	F	
Nurmi i nx.	5	6	4	5	6	4	
Gjithsej	11		9		10		30

Tab. 6.6

P E M Ë T						
	Banania		Molla		Banania dhe molla	
Gjinia	M	F	M	F	M	F
Numërimi						
Nimri i nx. sipas gjin.	5	6	4	5	6	4
Gjithsej	11		9		10	
					30	

Tab. 6.7

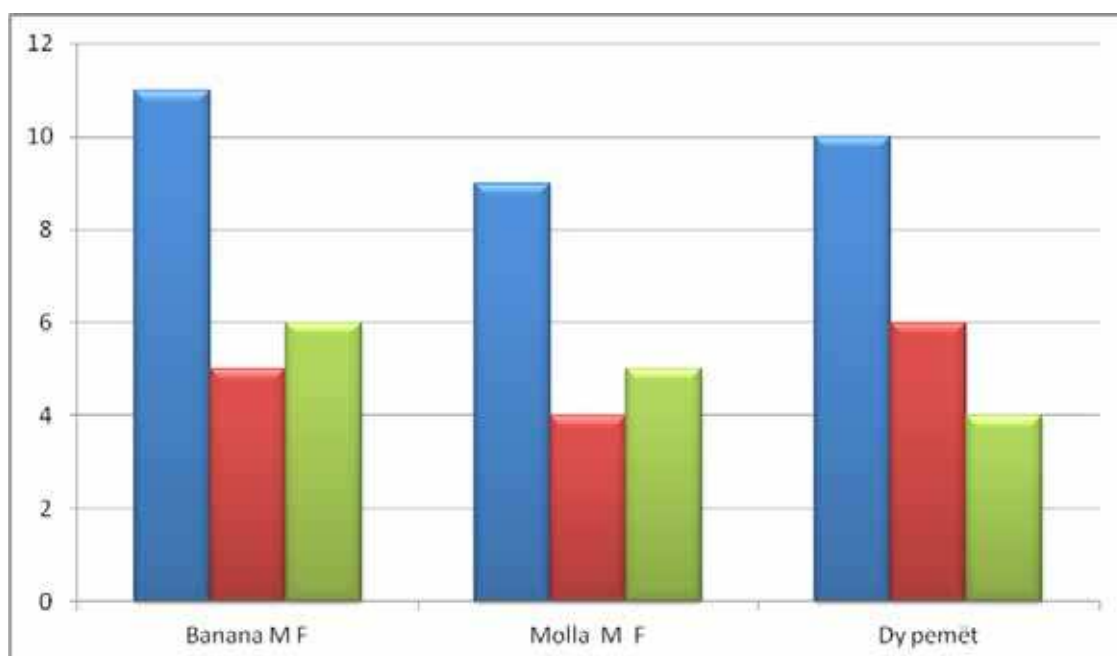


Fig. 6.6

Është e qartë se duke lexuar të dhënat e paqyruara në fig. 6.6, mund të përfundojmë se 11 nxënës të klasës pëlqejnë bananen, gjashtë prej të cilëve janë vajza, kurse 5 janë djem. Nëntë nxënës pëlqejnë mollën, 5 prej të cilëve janë vajza dhe 4 djem. Në fund, 10 nxënës pëlqejnë të dy pemët; 4 prej të cilëve janë vajza dhe 6 djem.

Ushtrim për punë të pavaruar.

Të bëhet një vërtetim me nxënësit e klasës suaj, për të nxjerrur një përfundim se cili prej tre emisioneve televizive: Filma vizatimorë (FV); Muzikë për fëmijë (MF) dhe Kuizi i diturisë (KD) u pëlqen atyre. Rezultatet e vërtetimit të ndahen edhe sipas gjinisë së nxënësve.

Udhëzim. Pyetësi i përgatitur duhet të ketë njërin nga format:

JU LUTEM PËRGJIGJUNI DUKE RRETHUAR VETËM NJËRËN NGA PËRGJIGJET E OFRUARA

Gjinia e të anketuarit

a) M b) F

Emisioni i preferuar

- a) Filma vizatimorë (FV)
- b) Muzikë për fëmijë (MF)
- c) Kuizi i diturisë (KD)
- ç) FV dhe MF
- d) MF dhe KD
- dh) KD dhe FV
- e) FV, MF dhe KD
- f) Asnjëri nga këto emisione

Ose

Gjinia e të anketuarit

a) M b) F

Ju lutem përgjigjuni duke rrethuar të paktën njërin nga përgjigjet e ofruara

Emisioni i preferuar

- a) Filma vizatimorë (FV)
- b) Muzikë për fëmijë (MF)
- c) Kuizi i diturisë (KD)
- d) Asnjëri nga këto emisione

Tabela për numërimin e rezultateve të vrojtimit duhet të jetë e formatit:

E M I S I O N I I P R E F E R U A R																GJITHSEJ	
Emisioni	FV		MF		KD		FV&MF		MF&KD		KD&FV		FV&MF&KD		Asnjëri		
Gjinia	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	
Nr.																	
Gjithsej																	

Tab. 6.8

6.3 Moda e të dhënave

Moda paraqet një element tjetër të rëndësishëm gjatë punës me të dhëna. Moda e një vargu të të dhënave paraqet kufizën e vargut që përsëritet më së shumti. Natyrisht, ky varg i të dhënave është varg i numrave realë të cilët u korrespondojnë anëtarëve të popullacionit mbi të cilët bëhet vërtetimi. Nëse me frekuencë të një anëtari të një vargu të të dhënave:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (1)$$

kuptojmë numrin natyral që tregon se sa herë ai term na paraqitet në vargun (1), atëherë *modë* të vargut (1) quajmë atë vlerë e cila ka frekuencën më të lartë.

SHMBOLI 4.

Nëse suksesi i notave të përfunduara në lëndën e matematikës në një klasë me 30 nxënës është dhënë me vargun si ni vijim:

5,3,3,2,5,4,4,2,2,3,3,4,3,5,3,3,1,3,4,3,1,3,3,3,1,3,2,5,4,2, Pa notë.

atëherë pasi të bëjmë grumbullimin e të dhënave, duke llogaritur edhe frekuencën e secilit anëtar të vargut të mësipërm, ndërtojmë tabelën:

LËNDA	M A T E M A T I K Ë						
Nota	5	4	3	2	1	Pa notë	Gjithsej
Gjithsej	4	5	12	5	3	1	30

Tab. 6.9

Atëherë shihet qartë se moda është nota 3, sepse frekuenca e këtij anëtari është 12.

Nëse këto të dhëna tabelare i parqesim në formë grafike, duke përdorur formën e drejtkëndshave, atëherë moda e këtyre të dhënave përfaqësohet me drejtkëndëshin më të lartë (fig.6.7).

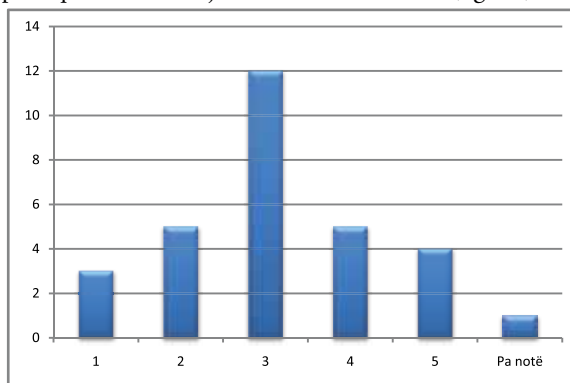


Fig.6.7

Ndonjëherë mund të ndodhë që dy anëtarë (kufiza) të vargut të të dhënave të kenë frekuencë të njëjtë. Për atë varg të të dhënave themi se është *bimodal*, pra ka dy moda.

! SHEMBULLI 5.

Në një anketë të klasës së tretë me 30 nxënës, të një shkolle fillore, se cila nga tri pemët: kumbulla, molla, dardha apo asnjëra u pëlqen më së shumti, rezultati ishte si vijon:

Pema	Kumbulla	Molla	Dardha	Asnjëra	Gjithsej
Numri i nx.	7	11	11	1	30

Tab. 6.10

Të caktojmë modën e këtyre të dhënave.

Vërejmë se këto të dhëna janë bimodale. Edhe molla e edhe dardha kanë frekuencë të njëjtë (11), prandaj ato paraqesin moda.

Nëse përdorim diagramin me drejtkëndësha për të parqitur të rezultatet e vrojtimit të mësipërm, atëherë të drejtkëndëshat që përfaqësojnë mollën dhe dardhën, respektivisht kanë lartësi të barabarta (fig.6.8).

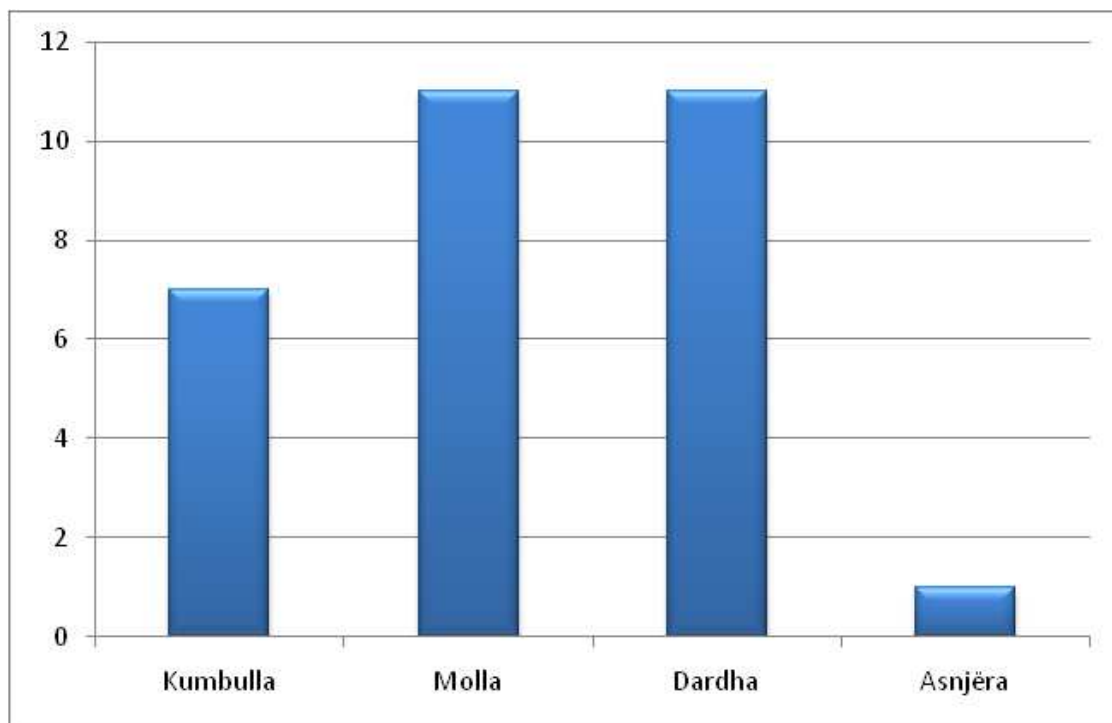


Fig.6.8

Ngjashëm kemi edhe të dhëna trimodale, katërmodale, etj.

6.4. Mesi aritmetik i të dhënave

Në punën me të dhëna, është me rëndësi që të gjejmë rezultatin mesatar gjatë një eksperimenti, i cili përsëritet disa herë. Ta ilustrojmë këtë me një shembull.

SHENBULLI 6.

Në mënyrë që vlerësimi përfundimtar nga lënda e matematikës të jetë më real, mësuesja Vlorë kishte organizuar 3 teste nga lënda e matematikës gjatë një gjysmëvjetori. Maksimumi i pikëve në secilin test ishte 100. Rezultatet e fituara janë dhënë në tabelën në vijim:

SUKSESI MESATAR						
Nr	Emri	Mbiemri	Testi1	Testi2	Testi3	Mesatarja
	Alba	Berisha	56	67	72	65
	Altin	Gashi	40	51	59	50
	Albina	Hoxha	80	65	83	76
	Besa	Hasani	40	51	59	50
	Bujar	Hyseni	56	67	72	65
	Blerta	Fazliu	39	35	22	32
	Burim	Bejta	60	67	71	66
	Dritan	Musliu	34	42	35	37
	Drita	Berisha	80	53	68	67
	Durim	Gashi	40	48	35	41
	Erseka	Hoxha	64	65	51	60
	Ermira	Mustafa	93	88	80	87
	Flamur	Hoxha	28	24	32	28
	Feriz	Hyseni	18	35	40	31
	Naim	Muqolli	56	67	72	65
	Petrit	Gashi	30	51	24	35
	Pajtesa	Selmani	58	30	29	39
	Zamira	Selimi	72	69	81	74

Tab. 6.11

Si e kalkuloi rezultatin mesatar mësuesja Vlorë? Ta marrim rastin e nxënësit të parë. Ajo i mblodhi pikët e të tre testeve dhe pastaj shumën e fituar e pjesëtoi me tre. Pra:

$$Mesatarja = \frac{56+67+72}{3} = 65 \text{ pikë.}$$

Ngjashëm veproi edhe me suksesin e nxënësve tjerë.

Vërejtje. Rezultatet e testeve janë zgjedhur në atë mënyrë që shuma e pikëve në të tre testet të plotëpjesëtohet me tre, që shumë rrallë ndodh në praktikë. Kjo është bërë me qëllim që këtë shembull mund ta shfrytëzojnë

mësuesit për spjegimin e të mesmes aritmetike me nxënësit e klasave të ulëta, sepse numrat decimalë nuk parashihen me planin dhe programi mësimor të klasave I-V. Por për mësuesit nuk duhet të paraqesë ndonjë vështirësi për llogaritjen e mesatares edhe kur shuma e pikëve nuk plotëpjesëtohet me tre.

Mes aritmetik të vargut të të dhënave $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ quajmë numrin $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

! SHEMBULLI 7.

Mesi aritmetik i vargut të të dhënave:

2,3,5,2,3,7,8,9,24

është: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{2+3+5+2+3+7+8+9+24}{9} = \frac{63}{9} = 7$.

Për ata që duan të dijnë më shumë

Mediana. Tjetër kuptim me rëndësi të puna me të dhëna është edhe caktimi i medianës për një varg të të dhënave. Si përkufizohet mediana e një vargu me n -të dhëna numerike $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$? Atë duhet kuptuar si një vlerë numerike e cila vargun e të dhënave të rirenditura nga vlera më e vogël kah vlera më e madhe, e ndanë në dy pjesë (dy nënvargje me gjatësi të barabarta).

Algoritmi për caktimin e medianës funksionon si vijon:

1. Së pari vlerat renditen sipas ligjit monotono-jozvogëlues (nga vlera më e vogël kah vlera më e madhe) dhe me atë rast fitohet vargu
 $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{in}$ ashtu që $x_{i1} \leq x_{i2} \leq x_{i3} \leq \dots \leq x_{in}$
2. Nëse numri n është tek, atëherë mediana paraqet atë vlerë numerike $x_{\frac{n+1}{2}}$, e cila vargun e fundit e ndanë në dy nënvargje me gjatësi të barabarta.

! SHEMBULLI 8.

Të caktojmë medianën për vargun e të dhënave:

1,2,5,8,8,2,3,5,6,8,4,10,9,7,7.

! ZGHIDHJE

Pasi t'i rendisim kufizat e vargut të të dhënave sipas ligjit monotono-jozvogëlues, marrim vargun:

1,2,2,3,4,5,5,6,7,7,8,8,8,9,10,

Prej nga vërejmë se anëtari i mesëm në vargun e rirenditur është numri 6. Pra mediana është e barabartë me 6.

3. Nëse numri n është çift, atëherë mediana paraqet të mesmen aritmetike të dy anëtarëve të mesëm të vargut të rirenditur.

❗ SHEMBULLI 9.

Të caktohet mediana e vargut të të dhënave:

- a. 2,1,2,3,4,6,7,7,8,11,4
- b. 3,5,2,1,2,8,12,4

❗ ZGJIDHJE

a) Vargu i rirenditur është: 1,2,2,3,4,4,6,7,7,11. Dy kufizat e mesme (e pesta dhe e gjashta) janë të barabarta me 4.

Kështu: $Mediana = \frac{4+4}{2} = 4$.

b) Ngjashëm, vargu i rirenditur sipas ligjit monotono-jozvogëlues është: 1,2,2,3,4,5,8,12. Dy anëtarët e mesëm (anëtari i katërt dhe ai i pesti) janë 3 dhe 4 respektivisht. Kështu: $Mediana = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$, prej nga vërejmë se mediana nuk është patjetër anëtar i vargut të të dhënave siç ndodhi në rastin a).

VII. Matematika dhe mësimdhënia e matematikës

“Matematika është mbretëresha e shkencave.”
Carl Friedrich Gauss

Gjurmët e matematikës janë të hershme. Zhvillimi i saj ka filluar në Egjiptin e lashtë, ka vazhduar në Mesopotami, Indi, Kinë, Greqinë antike, vendet islamike dhe më vonë është përhapur në mbarë botën. Dokumentet e para të shkruara Rhind Mathematical Papirus datojnë që nga vitet 2000 para erës së re, ndërsa studimi i saj si shkencë në vete filloi në Greqi në shekullin e 6 para erës së re. Nga këtu ka origjinën fjala “Matematikë”, e cila në Gjuhën antike Greke ka kuptimin e dijes, të studimit dhe të nxënies. Me këtë shprehje në Greqinë antike janë identifikuar dijetarët, të cilët kanë fituar njohuri për zgjidhjen e problemeve të ndryshme nga aritmetika dhe gjeometria përmes procesit të të nxënies dhe studimit.

Për shkak të natyrës komplekse të fushës së studimit të matematikës, në kohën tonë nuk ekziston një përkufizim i vetëm për të. Disa nga përkufizimet më të njohura janë:

- Matematika merret me studimin e sasive, strukturave, hapësirave dhe ndryshimeve. Matematikanët shqyrtojnë modelet dhe formulojnë supozime të reja. (Wikipedia)
- Matematika është shkenca e numrave dhe e operacioneve, e marrëdhënieve, e kombinimeve, e përgjithësimeve dhe e abstraksioneve të tyre, si dhe e konfigurimeve hapësinore, e strukturave, e masave, e transformimeve dhe e përgjithësimeve të tyre. (Merriam-Webster Dictionary)
- Matematika është shkenca mbi strukturën, procedurat dhe marrëdhëniet që kanë evoluuar nga numërimi, matjet dhe përshkrimi i formave të objekteve. Ajo merret me të kuptuarit logjik dhe llogaritjet sasiore. Që nga shekulli XVII ajo ka qenë ndihmë e domosdoshme për shkencat fizike dhe teknologjinë, aq sa është konsideruar gjuha themelore e shkencës. (Enciklopedia Britannica)

Duke pasur parasysh elementet e përbashkëta të përkufizimeve të ndryshme për matematikën, në shumë burime është dhënë një përkufizim më i përgjithshëm i saj:

“Matematika është bazë e dijes, e cila ka në qendër konceptet që kanë të bëjnë me sasinë, strukturën, hapësirën dhe ndryshimet, si dhe disiplinat akademike që i studiojnë ato”.

Disiplina e cila merret me studimin e sasisë është aritmetika, ajo që merret me studimin e strukturës është algjebra, ndërsa disiplinat që merren me studimin e hapësirës dhe ndryshimeve janë përkatësisht gjeometria dhe analiza. Për lehtësi studimi, të gjitha këto disiplina ndahen në nëndisiplina, siç është shembulli me algjebërën, e cila ndahet në algjebërën abstrakte që merret me studimin e strukturave algjebrike, në algjebërën lineare e cila merret me studimin e hapësirave vektoriale, etj.

Gjatë shekujve, matematikanët kanë analizuar konceptet matematike dhe marrëdhëniet ndërmjet tyre. Duke u bazuar në punën e trashëguar nga paraardhësit e tyre, si dhe rezultatet e punës individuale apo në grup, matematikanët kanë arritur të formulojnë supozime dhe rregulla të ndryshme, si dhe të vërtetojnë ato duke kontribuar në zhvillimin e matematikës. Si rezultat i punës së vazhdueshme, matematikanët arritën të vendosin edhe themelet e ndërtimit aksiomatik të disiplinave të ndryshme matematike.

Një zhvillim i tillë i ndihmoi matematikanët që duke u bazuar në aksiomatikën e caktuar të formulojnë rregullat e reja dhe t'i vërtetojnë ato në mënyrë deduktive përmes përdorimit të abstraksionit dhe rezonimit logjik. Kjo qasje përshpejtoi zhvillimin e përgjithshëm të matematikës dhe të disiplinave të saj. Natyrën aksiomatike të ndërtimit të matematikës më së miri mund ta kuptojmë duke analizuar përkufizimin që Benjamin Pierce e ka dhënë për matematikën. Në shënimet e tij, ai e përkufizon matematikën si “shkenca e cila nxjerrë përfundimet e nevojshme”. Pra, njohësit e matematikës arrijnë që të ndërtojnë të kuptuarit e tyre duke u bazuar në disa koncepte matematikore, të cilat pastaj arrijnë t'i zgjerojnë duke nxjerrë përfundime të ndryshme përmes rezonimit logjik.

Po si të ndihmohen nxënësit për t'i përvetësuar këto koncepte dhe mënyrën e nxjerrjes së përfundimeve?

Me këtë pyetje në mënyrë të vazhdueshme preokupohen të gjithë hartuesit e kurrikulave, të planeve dhe programeve mësimore, të teksteve shkollore të lëndës së matematikës, si dhe hulumtuesit e aspekteve të ndryshme të mësimdhënies së kësaj lënde. Mbi të gjitha, kjo pyetje preokupon mësimdhënësit, të cilët, duke qenë në kontakt të drejtpërdrejt me nxënësit, mbajnë përgjegjësinë kryesore për aftësimin e tyre në këtë lëndë.

Gjatë gjithë kohës, synim i të gjithë mësimdhënësve dhe ekspertëve të kësaj lënde ka qenë dhe vazhdon të jetë gjetja e metodave më të përshtatshme për mësimdhënien e matematikës. Pa marrë parasysh periudhën kohore dhe metodat e përdorura, parimet kryesore në të cilat është mbështetur shtjellimi i lëndës së matematikës kanë qenë thjeshtimi i prezantimit të koncepteve, lehtësimi i procedurave të zgjidhjes së problemeve, si dhe konkretizimi përmes shembujve nga jeta reale. Kjo është bërë me qëllim që të lehtësohet përvetësimi i njohurive nga ana e nxënësve, si dhe zhvillimi i shkathtësive e shprehive të tyre për të zbatuar njohuritë e fituara në zgjidhjen e problemeve nga jeta reale. Rezonimi logjik dhe qasja sistematike në zgjidhjen e problemeve që e karakterizon matematikën është konsideruar si atribut i rëndësishëm për krijimin e modeleve të përshtatshme për zgjidhjen e detyrave në shkencat e tjera dhe në jetën reale në përgjithësi. Rëndësia e matematikës në zhvillimet e shkencave të tjera është theksuar që në kohën e Gausit, i cili matematikën e quan “Mbretëresha e shkencave”.



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Ekzistojnë qasje të ndryshme të mësimdhënies, të cilat përdoren në shtjellimin e lëndës së matematikës. Ato mund të grupohen në dy kategori të mëdha: në qasjen tradicionale dhe atë bashkëkohore. Qasja tradicionale bazohet në metodat e mësimdhënies së drejtpërdrejt të cilat kanë në qendër mësimdhënësin, ndërsa ajo bashkëkohore mbështetet në metodat, strategjitë dhe teknikat e mësimdhënies dhe të nxëniet të cilat favorizojnë hulumtimin dhe ndërtimin e informacionit përmes pjesëmarrjes aktive të nxënësve në procesin mësimor.

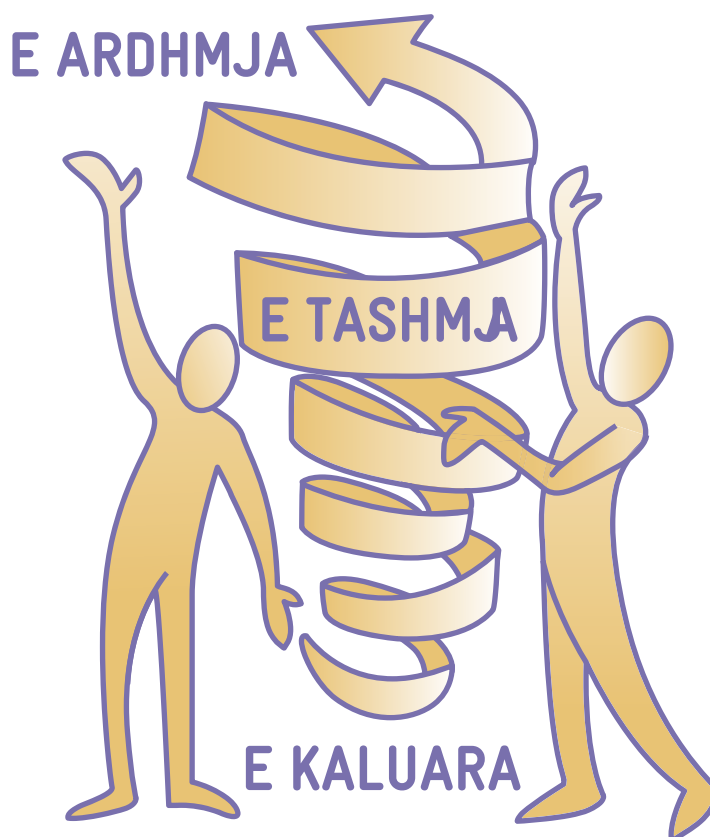
Disa nga karakteristikat e qasjes tradicionale dhe asaj bashkëkohore janë:

QASJA TRADICIONALE	QASJA BASHKËKOHORE
Mësimdhënësi është burim i vetëm i informacionit.	Ka disa burime të informacionit: mësimdhënësi, nxënësit, materialet e ndryshme që mund të përdoren.
Mësimdhënësi fokusohet më shumë në realizimin e planit dhe programit mësimor se sa në nevojat, kërkesat dhe interesimet e nxënësve.	Mësimdhënësi ka prioritet nevojat, kërkesat dhe interesimet e nxënësve, si dhe përfshirjen e tyre me rastin e reazlimit të planit dhe programit mësimor.
Fokusohet në mënyrën e dhënies së informacionit nga ana e mësimdhënësit duke i dhënë rëndësi transmetimit të tij.	Fokusohet në mënyrë e përfitimit të informacionit nga ana e nxënësve duke i dhënë rëndësi kuptimit të informacionit nga ana e tyre.
Bazohet në të nxënësit pasiv nga ana e nxënësve duke i dhënë rëndësi riprodhimit të njohurive.	Bazohet në të nxënësit aktiv nga ana e nxënësve duke i dhënë rëndësi reflektimit rreth të nxënësit.
Kontribuon në zhvillimin e konformitetit dhe mënyrës së të nxënësit e cila bazohet në miratim.	Kontribuon në zhvillimin e autonomisë së nxënësve dhe mënyrës së pavarur të tyre për të nxënë.

Metodat kryesore të mësimdhënies së drejtpërdrejt janë ligjërimi dhe demonstrimi. Edhe pse këto metoda i takojnë qasjes tradicionale të mësimdhënies, përdorimi i tyre me kujdes në matematikë është me vlerë. Ligjërimet e shkurtra, dhe, aty ku ka mundësi, të përcjella me demonstrim, janë të përshtatshme për t'u përdorur në matematikë sidomos në rastet e prezantimit të fakteve, përkufizimit të nocioneve, mësimi të rregullave, konkretizimit të objekteve matematikore, si dhe gjatë ndërtimit të shkathtësive të nxënësve për të zgjidhur probleme të ndryshme. Përdorimi i këtyre metodave është mjaft efikas sidomos kur ato planifikohen mirë, kombinohen me metodat e qasjes bashkëkohore të mësimdhënies dhe janë në funksion të motivimit të nxënësve për të nxënë.

Përpjekja për të shtuar suksesin e nxënësve në përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathtësive motivoi shumë edukatorë të hulumtojnë mënyrën e të mësuarit të fëmijëve dhe të propozojnë metoda efikase të mësimdhënies dhe të nxënësit. Si rezultat i punës kërkimore të tyre sot ekzistojnë disa teori të reja të të nxënësit, si: bihejviorizmi, kognitivizmi, konstruktivizmi, etj. Të gjitha këto teori sqarojnë se fëmijët që nga lindja janë agentë aktivë në përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathtësive. Ato mbështesin idenë se fëmijët më së miri mësojnë përmes ndërveprimit me mjedisin në të cilin jetojnë. Këto fakte duhet të shfrytëzohen nga mësimdhënësit e matematikës, të cilët me rastin e sqarimit të nocioneve të ndryshme duhet të kërkojnë paraprakisht nga nxënësit rikujtimin e njohurive që kanë rreth tyre, si dhe sqarimin e nocioneve ta lidhin sa më shumë që të jetë e mundur me objektet dhe fenomenet nga jeta reale që na rrethon.

Njëra nga teoritë më të reja të të nxënësit është konstruktivizmi. Kjo teori mbështet idenë se njerëzit ndërtojnë të kuptuarit dhe njohuritë e tyre për botën përmes përzgjedhjes së tyre dhe reflektimit mbi këto përvoja. Sipas konstruktivistëve përftimi i njohurive të reja organizohet sipas një spiraleje. Paranjohuritë dhe përvojat e njerëzve janë bazë e mirë për të ndërtuar në mënyrë të qartë informacionet e reja, ndërsa reflektimi rreth informacionit të ri ndihmon përforcimin e tij duke i kontribuar qëndrueshmërisë. Një qasje e tillë është shumë funksionale për sqarimin e shumë nocioneve matematike, si dhe për përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathtësive në këtë lëndë. Rikujtimi i njohurive të mëparshme rreth një koncepti në matematikë krijon një bazë të mirë për të ndërtuar mbi të njohuritë e reja, të cilat pastaj mund të përforcohen dhe të bëhen të qëndrueshme përmes zgjidhjes së detyrave të ndryshme.



Meqë teoria konstruktiviste mbështet ndërtimin e informacionit nga ana e nxënësve, atëherë zbatimi i saj në klasa mund të realizohet përmes metodave, teknikave dhe strategjive të reja të mësimdhënies dhe të nxënësve të cilat kanë në qendër nxënësin. Metodot, teknikat dhe strategjitë e tilla ofrojnë mundësinë e përfshirjes aktive të nxënësve në procesin mësimor, të cilët gjatë aktiviteteve të ndryshme arrijnë të ndërtojnë të kuptuarit e tyre kryesisht përmes formulimit të pyetjeve, dhënies së përgjigjeve, diskutimeve, debateve, shpjegimeve, zgjidhjes së problemeve, shqyrtimit të zgjidhjeve, prezantimit të punës së grupeve ose të rezultateve të projekteve të ndryshme, etj. Të gjitha këto aktivitete mund të zbatohen me sukses në mësimdhënien e matematikës. Përfshirja e aktiviteteve të tilla në procesin mësimor e bën matematikën më dinamike, më interesante, më të afërt me nxënësit dhe interesimet e tyre, më të pëlqyeshme për ta mësuar, si dhe më të lehtë për ta zbatuar.

Përveç këtyre përparësive, hulumtimet kanë treguar se metodot, teknikat dhe strategjitë me nxënësin në qendër janë superiore në krahasim me metodat e qasjes tradicionale për sa i përket: përgatitjes së nxënësve për t'u ballafaquar me informacionin e ri dhe shqyrtimin e tij nga këndvështrime të ndryshme, gjetjes së argumenteve, shfrytëzimit të burimeve të ndryshme të informacionit, aftësimit të tyre për zgjidhjen e problemeve, zhvillimit të mendimit kritik, rritjes së besimit të nxënësve për aftësitë e tyre individuale, etj. Po ashtu, hulumtimet kanë treguar se përdorimi i metodave, teknikave dhe strategjive të reja i kontribuon edhe formimit të qëndrimit pozitiv të nxënësve ndaj lëndëve të ndryshme, gjë shumë e nevojshme sidomos për lëndën e matematikës. Duke u bazuar në këto hulumtime arrijmë në përfundimin se mësimdhënia e cila angazhon nxënësit aktivisht në ndërtimin e të kuptuarit është shumë më efikase se cilido model i përgatitur nga mësimdhënësi, prandaj është me vlerë përdorimi i tyre.

7.1. Mësimdhënia e suksesshme

“ Mësimdhënësi mediokër tregon.
Mësimdhënësi i mirë shpjegon.
Mësimdhënësi superior demonstroi.
Mësimdhënësi madhështor inspiron. ”
W. A. Ward

Në mesin e mësimdhënësve dallohen disa, të cilët japin përshtypjen se janë të lindur për këtë profesion. Mësimdhënësit e tillë kanë sukses jo vetëm me një gjeneratë të nxënësve, por me të gjitha. Nxënësit e tyre u janë mirënjohës edhe pas shumë viteve të përfundimit të shkollimit. Ku qëndron fshehtësia e suksesit të këtyre mësimdhënësve dhe a mund t’ju mësohet ajo mësimdhënësve të tjerë?

Është mendim i përgjithshëm se faktori kryesor që e bën një mësimdhënësi të suksesshëm është dashuria ndaj profesionit. Një mësimdhënësi që e ushtron profesionin me dëshirë është një kërkues, i cili investon në profesionalizmin e vazhdueshëm të tij. Një mësimdhënësi i tillë është i gatshëm të përcjellë me vëmendje ndryshimet e përmbajtjeve lëndore dhe të metodologjisë së punës, të provojë zbatimin e tyre në klasa, të reflektojë risitë e zbatuara me kolegët, si dhe të organizojë mësimdhënien mbi bazën e mësimëve të mësuara dhe nevojave të nxënësve.

Sot nuk ka një listë përfundimtare e cila përmban karakteristikat e një mësimdhënësi të suksesshëm. Mirëpo, nga hulumtimet e ndryshme mund të konkludohet se disa nga ato janë: dija dhe pasioni për lëndën, komunikimi i qartë, të qenit kreativ, respektimi i nxënësve dhe nevojave specifike të tyre, motivimi i nxënësve për të nxënë, etj. Mësimdhënësi i suksesshëm konsiderohet personi, i cili ka besim se çdo nxënës mund të mësojë dhe që inkurajon secilin prej tyre për të nxënë. Sipas një thënie hebraike “Një nxënës nuk është një enë për t’u mbushur, por një llambë për t’u ndezur”, mund të nxjerrim përfundimin se mësimdhënësi i suksesshëm i konsideron nxënësit si “llamba”, ndërsa veten me fat për t’i ndezur ato.

Zhvillimet jashtëzakonisht të shumta teknike dhe teknologjike që po ndodhin në çdo sferë të jetës kanë parashtruar para mësimdhënësve kërkesa të reja. Meqë është e pamundur që nxënësit të ballafaqohen me fluksin e madh të informacioneve, sot mësimdhënësve u kërkohet që t’i kushtojnë kujdes udhëheqjes së nxënësve për të përvetësuar njohuritë e domosdoshme, ndërsa të fokusohen më shumë në zhvillimin e kompetencave të nxënësve për të pasur sukses në punë dhe jetë. Mësimdhënësve u këshillohet që të mos iu japin nxënësve përgjigjet e gatshme, por t’i aftësojnë ata për të nxënë në mënyrë të pavarur, për të hulumtuar përgjigjet, për të provuar rrugë të ndryshme të zgjidhjes së problemeve dhe për të diskutuar rezultatet. Pra, nga mësimdhënësit sot kërkohet që “nxënësve të mos t’iu japin peshq, por që t’i mësojnë ata të peshkojnë”. Meqë historikisht lënda e matematikës është konsideruar e vështirë nga pjesa më e madhe e nxënësve, mësimdhënësi i matematikës përveç të tjerave duhet t’i kushtojë kujdes edhe kultivimit të dëshirës së nxënësve për të mësuar këtë lëndë.

Për ta arritur sukses në procesin mësimor, disa nga veprimet që një mësimdhënës duhet të ndër-marrë janë:

- Të shprehë besimin se çdo nxënës mund ta mësojë lëndën e matematikës.
- Të përcaktojë ku dhe pse nxënësit kanë vështirësi në të nxënë.
- Të përshtatë mësimdhënien e tij nevojave dhe mundësive të nxënësve, të bëjë diferencimin e mësim-dhënies përmes planifikimit të aktiviteteve për të gjithë nxënësit.
- Të inkurajojë nxënësit në përpjekjet e tyre për ta mësuar matematikën.
- Të komunikojë në gjuhën (përdorimin e terminologjisë) që është e kuptueshme për nxënësit.
- Të përdorë metoda, teknika dhe strategji të ndryshme të mësimdhënies dhe të nxënit të cilat lehtësojnë përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e kompetencave të nxënësve.
- Të zgjedhë detyra që janë në përputhje me interesimet e nxënësve.
- Të konkretizojë nocionet me shembuj nga jeta praktike duke mishëruar idenë se matematika ka zbatim të jashtëzakonshëm në jetën reale.
- Të përdorë teknologjinë si një "vegël" të rëndësishme të mësimdhënies dhe të nxënit.
- Të përgëzojë nxënësit për suksesin e arritur.

Kjo listë nuk është përfundimtare. Ajo mund të plotësohet me shumë veprimtari të tjera të cilat janë dëshmuar të suksesshme gjatë punës praktike të mësimdhënësve të përkushtuar.

Për një mësimdhënie të suksesshme janë më rëndësi jo vetëm cilësitë e mësimdhënësit, qëndrimet e tij ndaj lëndës dhe qasjet e përgjithshme metodologjike, por edhe përgatitja e mësimdhënësit për mbajtjen praktike të mëimit. Të gjitha këto karakteristika të mësimdhënësit të suksesshëm mund të përvetësohen me vullnet dhe punë të vazhdueshme. Në përpjekjet e tij për sukses, mësimdhënësi duhet të jetë krenar për punën që bën, sepse sipas një autori të panjohur "Mësimdhënia është profesioni që i mëson të gjitha profesionet e tjera".

Mësimdhënësi duhet të jetë krenar për punën që bën, sepse "Mësimdhënia është profesioni që i mëson të gjitha profesionet e tjera".



7.2. Matematika në Kornizën e Kurrikulit

Para se të fillojë procesi mësimor, mësimdhënësi duhet të familjarizohet me Kornizën e Kurrikulit të Kosovës për të kuptuar se: Pse?, Çka?, Si? dhe Sa mirë? duhet të mësojnë nxënësit. Mësimdhënësit përmes Kornizës së kurrikulit arrijnë të kuptojnë qëllimet e sistemit të arsimit në Kosovë, parimet themelore të cilat i mbështetë ky kurrikul, karakteristikat e tij dhe organizimin e fushave lëndore për nivelet e ndryshme të arsimit. Të gjitha këto elemente ndihmojnë mësimdhënësit që të planifikojnë shtjellimin e lëndës në mënyrë që ajo të jetë në funksion të arritjes së qëllimeve të sistemit të arsimit në Kosovë. Parimet thelbësore të cilat e karakterizojnë kornizën e kurrikulit janë:

- Mësimdhënia me nxënësin në qendër dhe gjithëpërfshirja,
- Qasja e bazuar në kompetenca,
- Mësimdhënia dhe të nxënëti e integruar,
- Fleksibiliteti dhe ndryshueshmëria,
- Transparenca dhe llogaridhënia.

Për zbatimin e kornizës së kurrikulit sugjerohet përdorimi i metodave, teknikave dhe strategjive të reja të mësimdhënies dhe të nxënëti, të cilat mundësojnë përfshirjen aktive të të gjithë nxënësve në procesin mësimor, si dhe zhvillimin e kompetencave të tyre për jetë dhe punë në të ardhmen. Qasja e bazuar në kompetenca kërkon zgjedhjen dhe organizimin e atyre aktiviteteve të të nxënëti, të cilat integrojnë njohuritë e nevojshme me vlerat, qëndrimet dhe shkathhtësitë. Kjo qasje ndryshon nga ajo e të nxënëti rutinë, e cila bazohet në memorizimin dhe reproduktimin e njohurive të para-fabrikuara.

Korniza e Kurrikulit të Kosovës është e bazuar në zhvillimin e gjashtë kompetencave:

- Kompetencat e komunikimit dhe të shprehurit, të cilat synojnë që të rinjtë të bëhen komunikues efektiv,
- Kompetencat e të menduarit, për të përgatitur të rinjtë të bëhen mendimtarë kritikë dhe kreativë,
- Kompetencat e të mësuarit, që aftësojnë të rinjtë të bëhen nxënës të suksesshëm,
- Kompetencat për jetë, punë dhe mjedis, të cilat synojnë që të rinjtë të bëhen kontribuues produktiv të Kosovës dhe vendeve të tjera,
- Kompetencat personale për zhvillimin e shëndoshë të individëve, të cilët bëjnë zgjedhjet e duhura në jetë duke u mbështetur në dije,
- Kompetencat qytetare për të bërë të rinjtë qytetarë aktivë, pjesëmarrës dhe të përgjegjshëm.



Zhvillimi i këtyre kompetencave tek nxënësit synohet të arrihet përmes shtjellimit të përmbajtjeve të sistemuara në 7 fusha lëndore:

- Gjuhët dhe komunikimi
- Artet
- Matematika
- Shkencat
- Shoqëria dhe mjedisi
- Shëndeti dhe mirëqenia
- Puna dhe jeta

Në kornizën e kurrikulit përshkruhet se “matematika është një fushë lëndore e rëndësishme për zhvillimin e kompetencave të të menduarit, të nxënësve dhe atyre të punës.” Mirëpo, përveç këtyre kompetencave, matematika ndihmon edhe në zhvillimin e kompetencës së komunikimit përmes përdorimit të kodeve dhe simboleve të ndryshme, ndërsa përmes zhvillimit të të rezonuarit logjik që është karakteristikë për këtë lëndë, kontribuon edhe në zhvillimin e kompetencës personale dhe asaj qytetare.

Sipas kurrikulit, karakteristikë e mësimdhënies së matematikës në nivelin 1 dhe 2, që përfshin ciklin e shkollimit fillor, është aftësi i nxënësve për të kuptuar konceptet kryesore, siç janë: numërimi, të kuptuarit matematik dhe zgjidhja e problemeve. Në nivelin 1 mësimdhënësit duhet të përkrahin nxënësit që të fitojnë njohuritë themelore rreth llogaritjeve, si dhe zgjidhjes së detyrave të ndryshme, ndërsa në nivelin 2 ata duhet të ndihmojnë nxënësit për të forcuar njohuritë e tyre dhe për të zhvilluar procesin e të menduarit logjik/matematik. Në këtë fazë nxënësit duhet të ndihmohen për të kuptuar dhe përdorur drejt simbolet dhe operacionet aritmetike, për të lidhur konceptet matematikore me probleme nga jeta praktike, si dhe për të zhvilluar të menduarin e tyre për të qenë i strukturuar dhe i drejtuar nga zgjidhja e problemeve.

Rezultatet thelbësore për lëndën e matematikës për ciklin e shkollimit fillor janë definuar për secilën nga 8 aspektet e rëndësishme të mësimdhënies së saj, siç janë:

- Zgjidhja e problemeve,
- Arsyetimet dhe vërtetimet matematike,
- Komunikimi në/përmes matematikës,
- Lidhjet brenda matematikës dhe jashtë saj,
- Përfaqësimet në/përmes matematikës,
- Promovimi i modelimit matematik,
- Strukturimi i të menduarit matematik,
- Përdorimi i TIK në/për matematikë.

Këto rezultate thelbësore janë edhe për ciklet e tjera, mirëpo në ciklin fillor mësimdhënësit duhet të fokusohen në sqarimin e koncepteve themelore dhe procedurave të thjeshta të zgjidhjes së problemeve që janë pjesë e këtyre rezultateve thelbësore. Në bazë të rezultateve thelbësore të të nxënësve të lëndës së matematikës do të përcaktohen edhe planet dhe programet e reja mësimore. Deri atëherë, fokusi i mësimdhënësve gjatë përgatitjes së planeve globale, mujore dhe atyre ditore duhet të jetë në hartimin e rezultateve të të nxënësve dhe përcaktimin e aktiviteteve të ndryshme në atë mënyrë që ato të kontribuojnë në zhvillimin e gjashtë kompetencave të Kornizës së Kurrikulit, si dhe në arritjen e rezultateve thelbësore mësimore të lëndës së matematikës për këtë cikël të shkollimit.

7.3. Përgatitja e orës mësimore

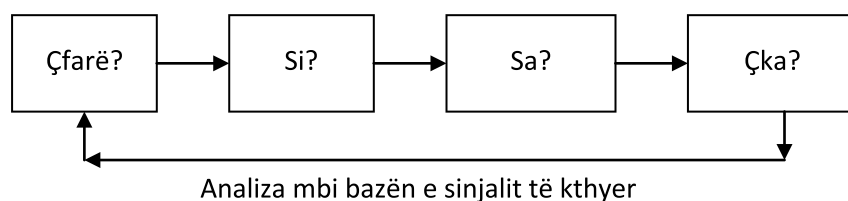
“Nëse keni dështuar në planifikim,
atëherë ju keni planifikuar
dështimin”

Michael Fullan

Mësimdhënia e suksesshme nuk ndodh rastësisht. Ajo është rezultat i një procesi të planifikuar mirë, i cili kërkon kohë, energji, fleksibilitet dhe përkushtim. Prandaj, mësimdhënësit duhet t'i qasen me kujdes hartimit të planit vjetor, mujor dhe planifikimit ditor të orës mësimore. Një planifikim i suksesshëm është atributi kryesor që i paraprin suksesit në mësim, ndërsa mungesa e tij bën që mësimdhënësit t'i ekspozohen rrezikut për dështim.

Mësimdhënësit duhet të hartojnë planin vjetor dhe atë mujor. Planet e tilla janë të domosdoshme, sepse ato orientojnë mësimdhënësin në shtjellimin sistematik të përmbajtjes lëndore. Më pas, mësimdhënësi duhet t'i kushtojë kujdes planifikimit dhe përgatitjes ditore.

Procesi i planifikimit ditore dhe zbatimit të tij është paraqitur me skemën e mëposhtme:



Sipas skemës së mësipërme, për një planifikim të suksesshëm ditore, mësimdhënësi duhet të ketë përgjigje në këto pyetje:

1. Çfarë do të arrihet? Pra, shkurt: Çfarë?

- Pse është e rëndësishme njësia mësimore?
- Ç'problem nga jeta reale mund të zgjidhet me përvetësimin e përmbajtjes së re?
- Cilat janë paranojohuritë e nxënësve rreth njësisë që do të zhvillohet?
- Cilat janë nevojat e nxënësve rreth kësaj njësie mësimore?
- Si lidhet njësia e re me njësinë paraprake dhe ato që vijnë më pas?
- Çfarë materiale nevojiten për shtjellim dhe demonstrim të përmbajtjes?
- Cilat kompetenca mund të zhvillohen te nxënësit përmes kësaj njësie?

2. Si do të arrihet? Shkurtimisht: Si?

- Cilat metoda, strategji, teknika, procedura do të përdoren për të arritur suksesin në shtjellimin e përmbajtjes?

3. Sa synohet të arrihet? Shkurtimisht: Sa?

- Si të vlerësohet ajo që kanë mësuar nxënësit?

Ndërsa pas zbatimit të planit, ai duhet të reflektojë rreth pyetjes:

4. Çka u arrit? Shkurtimisht: Çka?

- Çka shkoi mirë?
- Çka duhet të ndryshohet për të pasur më shumë sukses herën tjetër?

Dy pyetjet e fundit ndihmojnë mësimdhënësin të analizojë punën e tij, të reflektojë për sukseset dhe problemet eventuale. Informacionet që fitohen gjatë reflektimit (sinjalet e kthyer) e ndihmojnë mësimdhënësin që të përmirësojë praktikën e tij, duke ia përshtatur atë nevojave dhe interesimeve të nxënësve.

Ndërsa, përgjigjet në të gjitha pyetjet, ndihmojnë përgatitjen ditore, e cila zakonisht përmban: njësinë mësimore, rezultatet e të nxënësve, mjetet dhe materialet e nevojshme, strukturën e organizimit të orës mësimore, aktivitetet dhe procedurat e të nxënësve, si dhe detyrat e shtëpisë për nxënësit. Për të ndihmuar mësimdhënësin që t'i adresohen me sukses këtyre elementeve, më poshtë janë dhënë sqarimet për secilën prej tyre.

7.4. Rezultatet e të nxënit

Meqë Korniza e Kurrikulit të Kosovës bazohet në qasjen e bazuar në kompetenca, atëherë mësimdhënësi në përgatitjen e vet ditore duhet të hartojë rezultatet e të nxënit, arritja e të cilave i kontribuon zhvillimit të kompetencave të nxënësve.

Çfarë është rezultati i të nxënit dhe çka e dallon atë nga objektiva mësimore?

Sipas UNESCOs, rezultati i të nxënit paraqet atë çfarë një nxënës pritët të dijë, të kuptojë dhe/ose të jetë në gjendje të demonstrojë pas përfundimit të një procesi të të nxënit, si dhe shkathtësitë e caktuara intelektuale dhe praktike të fituara dhe të demonstruara me përfundimin e suksesshëm të një njësie mësimore, kursi apo programi. Thënë shkurt, "Rezultati i të nxënit është formulim që tregon se çfarë një nxënës pritët të jetë në gjendje të bëjë në përfundim të një njësie, moduli apo kursi." (Stephen Adam, 2004). Adam shkruan se "ekziston një konfuzion i shpeshtë në mes të rezultateve të të nxënit dhe qëllimeve e objektivave dhe shumë persona i referohen rezultateve të të nxënit dhe objektivave si sinonime. Qëllimet janë të lidhura për mësimdhënien dhe synimet e mësimdhënësit, derisa rezultatet e të nxënit janë të lidhura me procesin e të nxënit". Pra, objektivat janë formulime që tregojnë se çfarë mësimdhënësi synon për nxënësit e tij dhe janë zakonisht pjesë e qasjeve me mësimdhënësin në qendër, derisa rezultatet e të nxënit janë formulime që tregojnë se çfarë nxënësit janë në gjendje të bëjnë ose demonstrojnë si rezultat i të nxënit dhe në këtë mënyrë ato janë pjesë e qasjes me nxënësin në qendër.

Për të qartësuar më mirë dallimin në mes të objektivës mësimore dhe rezultatit të të nxënit po japim më poshtë dy shembuj.

- Në fund të orës mësimore nxënësit do të kenë njohuri për katërkëndëshat.
- Në fund të orës mësimore nxënësit do të jenë të aftë të përkufizojnë katërkëndëshat .

Në rastin e parë është dhënë një objektivë mësimore, sepse ajo shpreh se çfarë një mësimdhënësi synon që nxënësit e tij të dinë, ndërsa në rastin e dytë është dhënë një rezultat i të nxënit, sepse ai tregon se çfarë janë në gjendje të bëjnë nxënësit pas përfundimit të procesit të të nxënit.

Një sqarim i tillë ndihmon shumë mësimdhënësit në hartimin e rezultateve të të nxënit.

Përpilimi i rezultateve të të nxënit

Me rastin e përpilimit të rezultateve të të nxënit, mësimdhënësit duhet të kenë kujdes që ato të jenë në pajtim me kërkesat e Kornizës së Kurrikulit për zhvillimin e kompetencave, rezultatet thelbësore të klasës përkatëse, si dhe planet dhe programet e matematikës për atë klasë. Përveç kësaj, mësimdhënësit duhet të kenë kujdes që përpilimin e rezultateve të të nxënit ta bëjnë në varësi të përmbajtjes mësimore, niveleve të ndryshme të të nxënit të nxënësve, si dhe mënyrës së vlerësimit. P.sh nëse njësi mësimore është konstruktimi i katrorit, atëherë një rezultat i të nxënit do të dukej kështu: Nxënësit:

- përdorin vizoren dhe kompasin për konstruktimin e saktë të katrorit, në varësi të brinjës së dhënë.

ose më shkurt:

- konstruktojnë saktë katrorin, në varësi të brinjës së dhënë.

Në formulimin e rezultatit të mësipërm të të nxënit është marrë parasysh përmbajtja e njësive mësimore dhe të nxënit e nxënësve (konstruktimi i katrorit), si dhe mënyra e vlerësimit (konstruktimi i saktë - respektimi i procedurës).

Për të shkruar një rezultat të të nxënës, mësuesi duhet t'i përgjigjet pyetjes: Çfarë mund dhe çfarë duhet të arrihet nga nxënësi? Fjala “mund” paraqet pikënisjen e bazuar në parashikimet e nxënësve, ndërsa fjala “duhet” shpreh kriterin e suksesit që nxënësit e arrijnë si rezultat i të nxënës. Në rezultatin e të nxënës të përshkruar më sipër nxënësit mund të konstruktojnë (përmes përdorimit të vizores dhe kompasit që kanë mësuar më herët) katrorin, si dhe duhet të konstruktojnë saktë atë në varësi të brinjës së dhënë.

Me rastin e përpilimit të rezultateve të të nxënës, mësuesi duhet të kenë parasysh elementet përbërëse të tyre, siç janë: sjellja/veprimi, kushti dhe kriteri. Të gjitha këto elemente duhet të ndërthuren në përpilimin e rezultateve të të nxënës në mënyrë që të plotësojnë karakteristikat e tyre për të qenë (SMART):

- Specifike: të qarta dhe të fokusuar.
- Të matshme/të vëzhgueshme: të vlerësohet shkalla e arritjes së tyre.
- Të arritshme: diçka që duhet ta bëjnë nxënësit si rezultat i të nxënës.
- Të realizueshme: diçka që mund ta bëjnë nxënësit.
- Të përcaktuara në kohë: të realizueshme brenda një kohe të caktuar.

Në rezultatin e të nxënës të përshkruar më sipër, sjellja/veprimi është “përdorin”/“konstruktojnë”, kushti është “katrorin”, ndërsa kriteri është “saktësia” e konstruktimit të katrorit. Të gjitha këto elemente janë të harmonizuara në mënyrë që rezultati i të nxënës të plotësojë karakteristikat SMART.

Sjellja në rezultatin e të nxënës shprehet me foljet vepruese. Për të caktuar foljen e duhur, mësuesi duhet të identifikojë se çfarë mund të demonstrojë nxënësi si rezultat i të nxënës. Me qëllim të shmangies së paqartësive që shoqërojnë fjalët: di, njeh, kupton, mëson, familjarizohet me, ambientohet me, etj. propozohet përdorimi i foljeve të cilat mund të vëzhgohen. Pra, në vend të rezultateve të të nxënës “kupton konstruktimin e katrorit” këshillohet të shënohet “përdorin vizoren dhe kompasin për konstruktimin e saktë të katrorit”, gjë e cila demonstroi se nxënësit arrijnë të konstruktojnë katrorin.

A janë të domosdoshme tri elementet me rastin e formulimit të rezultateve të të nxënës?

Aty ku ka mundësi sugjerohet përpilimi i rezultateve të të nxënës me tri elementet, sepse një gjë e tillë ndihmon mësuesin në vlerësimin më mirë shkallën e përfutimit të njohurive nga nxënësit. Mirëpo, është i pranueshëm dhe formulimi i rezultateve të të nxënës me dy elemente, me sjelljen dhe kushtin. Ekzistojnë dhe shembuj të rezultateve të të nxënës me dy elemente p.sh. nxënësit:

- mbledhin thyesat me emërues të ndryshëm.
- zgjidhin ekuacione lineare me një të panjohur.

Meqë rezultatet e të nxënës përfshijnë njohuritë, shkathtësitë, qëndrimet dhe vlerat, atëherë përpilimi i tyre mund të realizohet përmes njohjes së tri fushave të të nxënës:

- Fushë së njohjes, e cila ka të bëjë me njohuritë dhe proceset.
- Fushë emocionale, e cila ka të bëjë me qëndrimet dhe vlerat.
- Fushë psikomotorë, e cila ka të bëjë me shkathtësitë fizike.

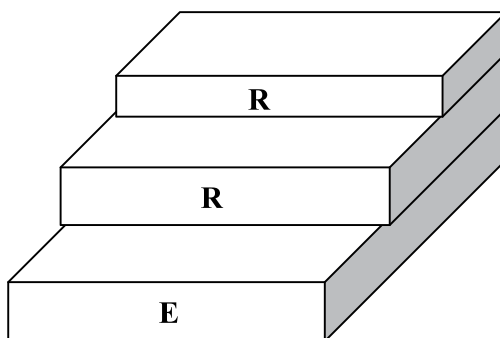
Në hartimin e rezultateve të të nxënës në matematikë ka rëndësi sidomos kuptimi i fushës së njohjes dhe klasifikimi i niveleve të të nxënës në këtë fushë sipas Taksonomisë së Bloom-it. Sipas kësaj taksonomie, në fushën e njohjes ekzistojnë 6 nivele të të nxënës, të klasifikuara sipas hierarkisë nga niveli më i ultë deri te niveli më i lartë i të nxënës: njohja, të kuptuarit, zbatimi, analiza, sinteza dhe vlerësimi. Përkufizimi i secilit nivel, shkathtësitë që i karakterizojnë këto nivele, caktimi i foljeve për të përpiluar rezultatet e të nxënës sipas këtyre niveleve, si dhe nga një shembull për çdo nivel janë dhënë në tabelë:

NIVELI	PËRKUFIZIMI DHE SHKATHTËSITË	FOLJET	SHEMBUJ
Njohja	Rikujtim i njohurive. Shkathtësitë që e karakterizojnë këtë nivel janë: - Vrojtimi dhe rikujtimi i njohurive. - Njohja e formulave, simboleve, përkufizimeve.	liston, përkufizon, tregon, lidh, përshkruan, vizaton, identifikon, emërton, numëron, etj.	Identifikon elementet kryesore të trekëndëshit.
Të kuptuarit	Aftësi për të zotëruar kuptimin. Shkathtësitë e këtij niveli janë: - Interpretimi i fakteve, krahasimi, kontrastet. - Rregullimi, grupimi dhe klasifikimi i njohurive.	klasifikon, shpjegon, krahason, dallon, diskuton, gjen shembuj, etj.	Klasifikon trekëndëshat sipas gjatësisë së brinjëve.
Zbatimi	Aftësia për të përdorur rregullat, metodat, konceptet, principet dhe formulat e mësuara në situata të reja. Shkathtësitë e këtij niveli janë: - Përdorimi i rregullave, formulave, metodave, koncepteve, etj. në situata të reja. - Zgjidhja e problemeve që kërkojnë zbatimin e formulave të mësuara.	njehson, konstrukton, zbaton, zgjidh, përdor, plotëson, ilustron, etj.	Njehson perimetrin e trekëndëshit kur janë dhënë tri brinjët e tij.
Analiza	Aftësia për të zbërthyer informacionin në pjesë përbërëse dhe identifikimin e lidhjeve në mes tyre. Shkathtësitë janë: - Gjetja e modeleve. - Identifikimi i pjesëve përbërëse. - Njohja e kuptimeve të fshehta.	analizon, kategorizon, provon, paraqet në diagram, zbërthen, etj.	Analizon përshatjen e formulës për gjetjen e perimetrit të trekëndëshit barabrinjës.
Sinteza	Aftësia për të lidhur në mënyrë kreative pjesët në një tërësi. Shkathtësitë që e karakterizojnë këtë nivel janë: - Përdorimi i ideve të vjetra për të krijuar ide të reja. - Përgjithësimet nga faktet e dhëna. - Lidhja e njohurive nga lëmi të ndryshme. - Parashikimet dhe nxjerrja e përfundimeve.	formulon, gjeneralizon, integron, modelon, strukturon, konstrukton, etj.	Formulon rregullën për njehsimin e perimetrit të trekëndëshit barabrinjës.
Vlerësimi	Gjykimi mbi vlerën e njohurive. Shkathtësitë janë: - Vlerësimi mbi kritere të caktuara të rezultateve. - Interpretimet origjinale të bazuara mbi argumente. - Shfrytëzimi i burimeve të ndryshme.	vlerëson, gjykon, vendos, rangon, përmbledh, konkludon, gjen shembuj nga jeta, etj.	Gjen shembuj nga jeta në të cilët duhet zbatuar formula për njehsimin e perimetrit të trekëndëshave.

Mësimdhënësit duhet të dinë se foljet e dhëna në tabelë mund të përcaktojnë rezultate të të nxëniet të nivelit më të lartë ose më të ultë se që është shënuar në tabelë, varësisht nga kërkesa që vjen pas foljes. Kështu p.sh. nëse kërkojmë që nxënësit të gjejnë zbatimin e logaritmeve në jetën praktike, kjo është një rezultat i të nxëniet të nivelit të lartë edhe pse folja të gjejë është e nivelit të të kuptuarit.

7.5. Struktura ERR e organizimit të orës mësimore

Struktura ERR (Evokimi, Realizimi i kuptimit dhe Reflektimi) është modeli më i përshtatshëm për të organizuar procesin e mësimdhënies dhe të nxënësve në klasë, sepse ajo korrespondon me aktivitetet e të nxënësve që Piazhe dhe pasuesit e tij i kanë identifikuar gjatë hulumtimeve: fazën e parashikimit, të ndërtimit të njohurive dhe atë të konsolidimit të tyre. Kjo strukturë ofron mundësinë e zhvillimit të procesit të të nxënësve sipas një spiraleje, e cila fillon me rikujtimin e njohurive në fazën e evokimit (parashikimi), zgjerohet me informacion të ri gjatë fazës së realizimit të kuptimit (ndërtimi i njohurive) dhe pas përfundimit të njohurive të fituara gjatë fazës së reflektimit, ofron mundësi për zgjerimin e tyre në të ardhmen edhe pas përfundimit të orës mësimore.



Struktura ERR është edhe një model tri shkallësh i organizimit të procesit mësimor, e cila respekton hierarkinë e niveleve të të nxënësve dhe të menduarit. Ajo fillon me evokimin e njohurive të nxënësve që paraqet nivelin e parë, vazhdon me përvetësimin e njohurive që konsiderohet nivel i dytë i të nxënësve dhe përfundon në reflektim, me sintetizimin dhe vlerësimin e informacionit të fituar, që paraqet nivelin më të lartë të të menduarit.

Në fazën e parë të evokimit, mësimdhënësi udhëheqë nxënësit drejt rikujtimit të njohurive me qëllim që të vendosë një bazë të mirë mbi të cilën në mënyrë të natyrshme do të vendoset informacioni i ri. Në këtë mënyrë, mësimdhënësi arrin të jetësojë thënien e njohur se:

"Njohuritë që një njeri zotëron janë kushti i parë për ato që mund të mësojë."

Kjo fazë është shumë e rëndësishme në procesin e të nxënësve, sepse përmes rikujtimit të njohurive ofrohet mundësia e përfshirjes aktive të të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Njohuritë që prezantojnë të tjerët gjatë fazës së evokimit, si dhe dëshira për të marrë pjesë në proces, zgjojnë kureshtjen e nxënësve dhe nxisin motivimin e brendshëm të tyre për të nxënë. Këto elemente janë shumë të rëndësishme për mbarëvajtjen e procesit të të nxënësve, sepse ndikojnë në ruajtjen e interesimit të nxënësve për të nxënë edhe gjatë fazave të tjera të orës mësimore.

Gjatë fazës së dytë, asaj të realizimit të kuptimit, nxënësit ballafaqohen me informacionin e ri, qoftë përmes leximit të një materiali, dëgjimit të një prezantimi, realizimit të një eksperimenti, shfrytëzimit të uebfaqeve, etj. Kjo është faza në të cilën arrihet "të nxënësve" e njohurive të reja. Duke vendosur lidhje në mes të njohurive që dinë dhe atyre me të cilat janë duke u ballafaquar, nxënësit arrijnë të ndërtojnë "të kuptuarit" e tyre rreth informacionit të ri.

Qëllimi i fazës së tretë është përfundimi i informacionit të fituar. Një gjë e tillë mund të arrihet përmes zgjidhjes së detyrave, gjetjes së shembujve nga jeta praktike në të cilat mund të zbatohen njohuritë e fituara, ndërtimit të ndonjë modeli praktik, diskutimeve të ndryshme, etj. Mësimdhënësi në këtë fazë duhet të inkurajojë nxënësit që të jenë sa më të shkathtë në zgjidhjen e problemeve, sa më kreativë në prezantimin e rezultateve të punës së tyre, sa më krijues në punimin e modeleve, dhe të jenë bindës gjatë diskutimeve që organizohen rreth çështjeve të caktuara. Po ashtu, ai duhet të kontrollojë edhe arritjen e rezultateve të të nxënësve dhe të bëjë intervenimet e duhura në rast nevojë.

7.6. Aktivitetet dhe procedurat e mësimdhënies dhe të nxënit

Pas përpilimit të rezultateve të të nxënit, mësimdhënësi në përgatitjen e tij ditore duhet të shënojë edhe aktivitetet dhe procedurat në bazë të cilave do të udhëheqë nxënësit në përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathhtësive të tyre.

Qasja me nxënësin në qendër ofron mundësinë e zgjedhjes së metodave, strategjive dhe teknikave efektive të mësimdhënies dhe të nxënit të cilat mundësojnë përfshirjen aktive të nxënësve në procesin mësimor, ndërtimin e njohurive nga ana e tyre, si dhe zhvillimin e kompetencave të nxënësve të parapara me Kornizën e Kurrikulit të Kosovës. Meqë numri i metodave, strategjive dhe teknikave mësimore është mjaft i madh, emërtimi i tyre mund të ndryshojë në programe të ndryshme, si dhe në lëndën e matematikës disa nga ato duhet të modifikohen, atëherë është e këshillueshme që mësimdhënësi në përgatitjen e tij ditore të përshkruajë aktivitetet dhe procedurat e mësimdhënies dhe të nxënit, të cilat planifikon t'i realizojë me nxënësit. Ai mund të shënojë edhe metodat/strategjitë/teknikat mësimore që do të përdorë, por është mirë që në kuadër të tyre të përshkruajë aktivitetet dhe procedurat që do të realizojë. Në këtë mënyrë planifikimi i tij do të jetë më i plotë, më i qartë dhe më i kuptueshëm për një numër më të gjerë të mësimdhënësve. Një përgatitje e tillë mund t'ju shërbejë edhe mësimdhënësve të tjerë, të cilët dëshirojnë të zbatojnë qasjen bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënit, mirëpo nuk kanë pasur rastin të marrin pjesë në programe për zhvillim profesional të tyre.

Mësimdhënësi mund të zgjedhë aktivitete të ndryshme për t'i realizuar në klasë me nxënësit. Mirëpo, zgjedhja e tyre duhet të bazohet në rezultatet e të nxënit që planifikohen të arrihen, aftësitë e nxënësve, qëllimet e fazave të ndryshme të strukturës ERR, si dhe kohën që është në dispozicion. Spektri i gjerë i aktiviteteve ofron mundësi që mësimdhënësit të jenë kreativ në zgjedhjen e tyre. Për të zgjuar interesimin e nxënësve për të nxënë, mësimdhënësi duhet të zgjedhë aktivitete të larmishme, të cilat janë të pëlqyeshme nga nxënësit dhe sjellin kënaqësi dhe entuziazëm në klasë. Ndërsa, për të lehtësuar të nxënit e të gjithë nxënësve, mësimdhënësi duhet të planifikojë aktivitete që kanë karakter vizual, auditiv dhe kinestetik. Kjo është me rëndësi, sepse nxënësit e kanë më të lehtë të mësojnë, nëse përfshihen në aktiviteteve që u përshtaten stileve të tyre të të nxënit.

Po ashtu, mësimdhënësit duhet të kujdesen që të zgjedhin aktivitete të përshtatshme për nxënësit që kanë nivel të ndryshëm të aftësive për të nxënë. Dhe mbi të gjitha, mësimdhënësit duhet të zgjedhin aktivitete që motivojnë të nxënit e nxënësve, që kultivojnë kërkshërinë dhe interesin e tyre për të mësuar, si dhe që kontribuojnë që nxënësit ta duan dhe ta mësojnë lëndën e matematikës.

Për të arritur synimet e mësipërme, mësimdhënësit duhet të zgjedhin aktivitete të cilat kanë nxënësin në qendër dhe të nxënit e tij. Pra, aktivitetet të cilat mundësojnë të nxënit aktiv, të nxënit në bashkëpunim, të nxënit të bazuar në probleme, përmes projekteve, rastet e studimit, etj.

7.7. Të nxënit aktiv

“E dëgjoj dhe e harroj. E shoh dhe e mbaj në mend. E bëj dhe nuk e harroj”

Proverb kinez

Në parim ekzistojnë dy forma të të nxënit: të nxënit pasiv dhe ai aktiv. Të nxënit pasiv realizohet gjatë zbatimit të mësimdhënies së drejtpërdrejtë, e cila kërkon që nxënësit në mënyrë pasive të pranojnë informacionin përmes dëgjimit të një ligjërate, shikimit të ndonjë materiali, ose marrjes së shënimeve. Në anën tjetër, të nxënit aktiv është një proces, i cili kërkon pjesëmarrjen aktive të nxënësve në leximin apo shikimin e ndonjë materiali, realizimin e ndonjë eksperimen-

ti, kërkimin e informacioneve në internet, zgjidhjen e detyrave, reflektimin me shkrim rreth çështjeve të ndryshme, etj. Përfshirja aktive e nxënësve në aktivitetet e mësipërme mund të realizohet në forma të ndryshme, disa prej të cilave janë:

- Inkurajimi i nxënësve për të formuluar pyetje, për të hulumtuar dhe gjetur përgjigje, për të provuar zgjidhjen e detyrave, si dhe për të shqyrtuar natyrën e zgjidhjeve.
- Motivimi i nxënësve për të marrë pjesë në diskutime, debate, dramatizime, etj.
- Përkrahja e nxënësve për të realizuar eksperimente apo projekte të ndryshme, për të ndërtuar modele të objekteve, etj.

Të nxënit aktiv më së miri sqarohet përmes thënies kineze të shënuar në fillim, e cila thekson faktin se nëse nxënësit përfshihen aktivisht në procesin e të nxënit, atëherë ajo njohuri është e qëndrueshme dhe mund të shfrytëzohet në rast nevojë.

Aktivitetet që promovojnë të nxënit aktiv kërkojnë që mësimitdhënësi të aftësojë nxënësit për t'u ballafaquar në mënyrë të drejtpërdrejtë me informatën, për ta shqyrtuar atë nga këndvështrime të ndryshme, për të kërkuar informacione shtesë në rast nevojë, për të ndërtuar të kuptuarit mbi informacionin e pranuar dhe për të gjetur mundësinë e zbatimit të informacionit të fituar. Meqë të nxënit në matematikë është një proces në të cilin "ndërtohet" njohuria dhe kërkohet zbatimi i njohurisë së fituar në zgjidhjen e detyrave të ndryshme, atëherë organizimi i procesit mësimor përmes aktiviteteve që promovojnë të nxënit aktiv e ndihmojnë këtë proces.

Në lëndën e matematikës mund të realizohen me sukses shumë aktivitete që kanë për qëllim përfshirjen aktive të nxënësve në procesin e të nxënit. Disa prej tyre janë: leximi i njësive mësimore nga ana e nxënësve, diskutimi rreth informacionit të lexuar, formulimi i hipotezave dhe vërtetimi i tyre, kërkimi i informacionit shtesë, zbatimi i njohurisë së fituar në zgjidhjen e detyrave, konstruktimi i figurave të ndryshme, vizatimi dhe ndërtimi i modelit të objekteve gjeometrike, realizimi i projekteve të caktuara, matjet e ndryshme, puna me të dhëna, etj. Këto aktivitete mund të realizohen përmes metodave, strategjive dhe teknikave të ndryshme që promovojnë të nxënit aktiv, disa prej të cilave janë:

INSERT-i apo leximi me anën e shenjave. Nxënësit lexojnë materialin dhe në paragrafe varësisht nga njohuritë e tyre vendosin 4 shenjat:

“√” për informacionin që dinë,

“+” për informacionin që mësojnë,

“-“ për informacionin që dinë ndryshe,

“?” për informacionin e paqartë ose për të kërkuar më shumë informacion.

DRTA apo lexim i drejtuar. Njësia ndahet në pjesë. Pas leximit të pjesëve mësimitdhënësi parashtron pyetjet për të kontrolluar të kuptuarit e nxënësve.

Ditari dypjesësh. Është një tabelë e përbërë nga dy shtylla. Nxënësit në anën e majtë të tabelës kanë pyetjet dhe detyrat, ndërsa pas leximit të pjesës, në anën e djathtë ata duhet të shënojnë përgjigjet dhe të zgjidhin detyrat.

Di/Dua të di/Mësova. Është tabelë e përbërë nga tri kolona. Në kolonën e parë nxënësit shënojnë atë që dinë ose që mendojnë se dinë, në shtyllën e dytë shënojnë pyetjet rreth informatave që ju interesojnë rreth një teme të caktuar, ndërsa pas leximit të materialit nxënësit në shtyllën e tretë shënojnë atë që mësojnë, si dhe përgjigjet e atyre pyetjeve, të cilat kanë mundur t'i gjejnë në material.

Nëse në procesin e të nxënësve aktiv marrin pjesë 2 apo më shumë nxënës, atëherë kemi të bëjmë me të nxënësve në bashkëpunim. Kjo formë e të nxënësve është shumë e përshtatshme për ta përdorur në mësimdhënien e matematikës, sepse nxënësit shpeshherë kanë nevojë të bashkëpunojnë për të kuptuar një problem apo për të analizuar mënyrën e zgjidhjes së tij. Matematika është lëndë e ndërtuar në mënyrë sistematike, ku njohuritë e reja vendosen mbi ato që janë mësuara më parë, prandaj zgjidhja e shumë detyrave kërkon rikujtimin e formulave, rregullave apo procedurave të mësuara më parë dhe jo të gjitha mund t'i kujtohen individit në çast. Bashkëpunimi i kontribuon edhe zgjidhjes së saktë të detyrave. Si rezultat i punës në grup shumë gabime individuale mund të evitohen me kohë.

Ekzistojnë forma të ndryshme me anë të cilave realizohet të nxënësve në bashkëpunim, por secila prej tyre ndjek pothuajse të njëjtën procedurë si më poshtë:

- Mësimdhënësi prezanton një material të ri, diskuton një çështje që duhet të hulumtohet, parashtrohet disa pyetje ose një problem.
- Ndan klasën në grupe të vogla me nga 2-6 anëtarë.
- Jep detyrën për grupet.
- Ofron materialet e nevojshme ose adresat në internet, të cilat do të shfrytëzohen nga nxënësit.
- Kërkon që nxënësit të bashkëpunojnë për të gjetur informacionet e kërkuara, qoftë përgjigjet në pyetjet e parashtuara ose zgjidhjen e problemit.
- Nxënësit duhet të sigurohen që të gjithë anëtarët e grupit janë familjarizuar me përgjigjet dhe zgjidhjen e problemit.
- Prezantohet puna e grupeve në forma të ndryshme.

Nxënësit gjatë bashkëpunimit në grup diskutojnë idetë e ndryshme matematikore, analizojnë mënyrat e zgjidhjes së problemeve, rikujtojnë njohuritë apo modelet e nevojshme për zgjidhjen e tyre, ndërtojnë hipoteza dhe gjejnë rrugë për vërtetimin e tyre, identifikojnë rastet nga jeta e përditshme ku mund të zbatohet njohuria e fituar, etj. Derisa nxënësit bashkëpunojnë në grup, mësimdhënësi monitoron punën e tyre. Ai/ajo inkurajon punën e grupeve, ofron përkrahje, sqaron paqartësitë eventuale, dhe në rast nevojë ofron ndihmën e tij/saj.

Motoja e të nxënësve në bashkëpunim është “përgjegjësi e përbashkët, llogaridhënie individuale”. Kjo shprehje do të thotë se veprimtaritë e të nxënësve në bashkëpunim kërkojnë nga nxënësit që të ndajnë përgjegjësi për njëri-tjetrin dhe të ndihmojnë shokët/shoqet të mësojnë, sidomos ata që kanë vështirësi në të nxënë, mirëpo në anën tjetër ata japin llogari individuale për të nxënësve e tyre personal.

Sipas David and Roger Johnson ekzistojnë 5 tipare që karakterizojnë të nxënësve në bashkëpunim:

- Për mbarrëvajtje të punës në grup mësimdhënësi duhet të zhvillojë te nxënësit ndërvlerësimin pozitiv. Kjo mund të arrihet duke iu caktuar nxënësve synimet e përbashkëta dhe në anën tjetër detyra dhe role të ndryshme në zgjidhjen e tyre. Mësimdhënësi “mbjell” te nxënësit ndërvlerësimin pozitiv duke iu sqaruar se zgjidhja e detyrave kërkon bashkëpunim dhe si rezultat i punës në grup ata mund “të fundosën ose të notojnë së bashku”.
- Nxënësit duhet të ndërveprojnë në mes vete për të realizuar me sukses detyrat e ndryshme në matematikë. Gjatë ndërveprimit ata ndajnë njohuritë e tyre, ndihmojnë, plotësojnë dhe inkurajojnë njëri-tjetrin për të arritur sukses. Sa më shumë që nxënësit kujdesen për njëri-tjetrin aq më shumë ata punojnë për të arritur qëllimet e përbashkëta.
- Mësimdhënësi duhet të kultivojë te nxënësit përgjegjësinë vetjake dhe në grup. Secili nxënës është përgjegjës për realizimin e detyrës së tij brenda grupit, por në anën tjetër ai është përgjegjës edhe për suksesin e anëtarëve të tjerë të grupit.
- Gjatë të nxënësve në grup nxënësit përdorin shkathtësitë individuale dhe shprehjet sociale. Me qëllim që të koordinohet puna brenda grupit dhe të arrihen synimet, nxënësit duhet të përdorin disa shkathtësi, siç janë: udhëheqja, marrja e vendimeve, ndërtimi i besimit, komunikimi dhe menaxhimi i konflikteve.
- Mësimdhënësi duhet të inkurajojë nxënësit të diskutojnë për veprimet e grupit, pra për sukseset e arritura ose për “dështimet”. Po ashtu nxënësit duhet të diskutojnë se çfarë veprime duhet të ndërmarrin në të ardhmen për të arritur më shumë sukses.

Hulumtimet e shumta eidentojnë shumë përparësi të të nxënësve në bashkëpunim, si:

- Përmirëson të kuptuarit e nxënësve
- Rrit vetëbesimin dhe qasjen pozitive ndaj të nxënësve
- Rrit përgjegjësinë individuale
- Zhvillon shkathtësitë sociale, etj.

Aktivitetet që promovojnë të nxënësve në bashkëpunim mund të realizohen në kuadër të disa strategjive dhe teknikave bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënësve, si p.sh.

Mendo/Puno në dyshe/Thuaja grupit. Nxënësit mendojnë në mënyrë individuale rreth një çështje, bashkëbisedojnë me shokun/shoqen dhe në fund prezantojnë informacionet para grupit.

Mësimdhënia e ndërsjellë. Njësia ndahet në pjesë. Secili nxënës brenda grupit lexon pjesën e parë, ndërsa nxënësi me numër 1 ka rolin e “mësimdhënësit” për ta sqaruar atë për të tjerët. Procedura vazhdon ngjashëm për pjesët e tjera.

Ndërthurja (Jigsaw). Njësia ndahet në pjesë. Secili nxënës brenda grupit bëhet ekspert për pjesën e tij dhe ka obligim të sqarojë atë për të tjerët. Secili nxënës duhet të dëgjojë me kujdes pjesën e shoku/shoqes për të kuptuar tërë njësien mësimore.

Tryeza e rrumbullakët. Një letër dhe një laps pasohen në mënyrë sistematike te anëtarët e grupit, të cilët shkruajnë ide rreth një çështje të caktuar.

Të nxënësve e bazuar në projekte është njëra nga format e të nxënësve aktiv. Kjo formë e të nxënësve ka filluar të zbatohet kohëve të fundit dhe zakonisht nga mësimdhënësit, të cilët synojnë të pajisin nxënësit me njohuri të thella, si dhe të avancojnë zhvillimin e shkathtësive të tyre. Zbatimi i kësaj forme të të nxënësve kërkon që mësimdhënësi së bashku me nxënësit të identifikojnë një temë ose një problematikë, e cila është me interes të hulumtohet. Më pas, hartohet projekti dhe nxënësit në mënyrë individuale ose në grup hulumtojnë informacionet rreth temës ose problematikës së caktuar. Pas një periudhe të caktuar kohore, rezultatet e projektit prezantohen dhe nxënësit pjesëmarrës vlerësohen në bazë të kontributit që kanë dhënë dhe suksesit që ka arritur projekti si tërësi. Disa nga temat të cilat mund të zhvillohen në projekte në lëndën e matematikës mund të jenë:

- Figurat gjeometrike dhe trupat gjeometrikë
- Matematika e aplikuar
- Rrethi si element integrimi i Matematikës, Gjuhës shqipe dhe Edukatës Fizike, etj.

Gjatë realizimit të projekteve nxënësit përfitojnë njohuri të reja dhe zhvillojnë shkathtësi të ndryshme, siç janë: shkathtësitë për prezantim dhe komunikim, për organizim dhe menaxhim të kohës, për hulumtim dhe kërkim, për vërtetësim dhe reflektim, për pjesëmarrje të grupit dhe udhëheqje. Të gjitha këto janë shumë të nevojshme për të përgatitur një nxënës sipas kërkesave të shekullit 21.

7.8. Pyetjet, detyrat, problemet matematikore

Matematika është lëndë e cila nuk mund të mësohet, nëse informacioni i fituar nuk zbatohet në zgjidhjen e detyrave dhe problemeve të ndryshme. Për këtë arsye, formulimi i pyetjeve, si dhe përzgjedhja e detyrave dhe e problemeve ka rëndësi të jashtëzakonshme me rastin e planifikimit ditor të një njësie mësimore.

Pyetjet dhe teknikat e të pyeturit kanë vlerë të shumëfishtë në orën e matematikës. Një mësimdhënësi i kujdesshëm me anën e pyetjeve arrin të kontrollojë të kuptuarit e nxënësve, përkatësisht saktësinë e përvetësimit të informacioneve, shkallën e përvetësimit të tyre, si dhe të identifikojë problemet eventuale me të cilat mund



të ballafaqohen nxënësit gjatë të nxënës. Duke parashtruar pyetje të niveleve të ndryshme, mësimdhënësi arrin të ketë informacion për shkallën e përparimit të nxënësve, e cila i ndihmon të kontrollojë arritjen e rezultateve të të nxënës.

Mësimdhënësi duhet të bëjë vetëm një numër të kufizuar të pyetjeve të nivelit të ultë dhe ato kryesisht për të verifikuar nëse nxënësit arrijnë të përvetësojnë formulat, rregullat apo konceptet e reja. Edhe pse pyetjet riprodhuese janë të thjeshta, ato kanë rëndësinë e tyre në matematikë, sepse ato ndihmojnë mësimdhënësin të verifikojë saktësinë e përvetësimit të informacionit nga ana e nxënësve. Po ashtu, pyetjet e nivelit të tillë mundësojnë përfshirjen aktive në procesin mësimor të nxënësve që kanë vështirësi në të nxënë. Këto pyetje nxisin përfshirjen e nxënësve të tillë dhe hapin “rrugën” për përparimin gradual të tyre në matematikë. Pyetjet e nivelit të lartë që zakonisht fillojnë me “Si ...?”, “Pse...?”, dhe “Çfarë” janë pyetje që kërkojnë nga nxënësit të mendojnë dhe të reflektojnë për atë që kanë mësuar. Përgjigjet në këto pyetje tregojnë shkallën e përvetësimit të njohurive nga ana e nxënësve.

Disa mësimdhënës bëjnë shumë pyetje të nivelit të ultë duke u kënaqur me faktin se nxënësit e tyre riprodhojnë saktë informacionin e mësuar. Meqenëse hulumtimet e shumta kanë treguar se një qasje e tillë nuk është e mjaftueshme për të zhvilluar kompetencat e nevojshme tek nxënësit, atëherë mësimdhënësit e tillë duhet ta ndryshojnë atë. Ndryshimi mund të realizohet në forma të ndryshme, njëra prej të cilave është edhe riformulimi i pyetjeve p.sh.

PYETJET E NIVELIT TË ULTË	PYETJET E NIVELIT TË LARTË
Sa bëjnë 4 · 6 ?	Si mund të shprehet numri 24 si prodhim i dy numrave?
Sa është perimetri i drejtkëndëshit me brinjë a=4cm dhe b=2 cm?	Sa mund të jenë brinjët e drejtkëndëshit, nëse dihet se perimetri i tij është 24cm?

Siç shihet nga tabela e mësipërme, pyetjet e nivelit të ultë kërkojnë nga nxënësit rikujtim dhe zbatim të njohurive, ndërsa ato të nivelit të lartë kërkojnë që nxënësit të analizojnë, zbatojnë, sintetizojnë dhe vlerësojnë informacionin para se të japin përgjigje. Pyetjet e nivelit të lartë ofrojnë mundësinë që mësimdhënësi të zhvillojë te nxënësit shkathhtësinë e të menduarit kritik, sepse për t’u përgjegjur saktë nxënësit duhet të mendojnë në mënyrë të thelluar dhe të marrin parasysh shumë faktorë dhe informacione të tjera.

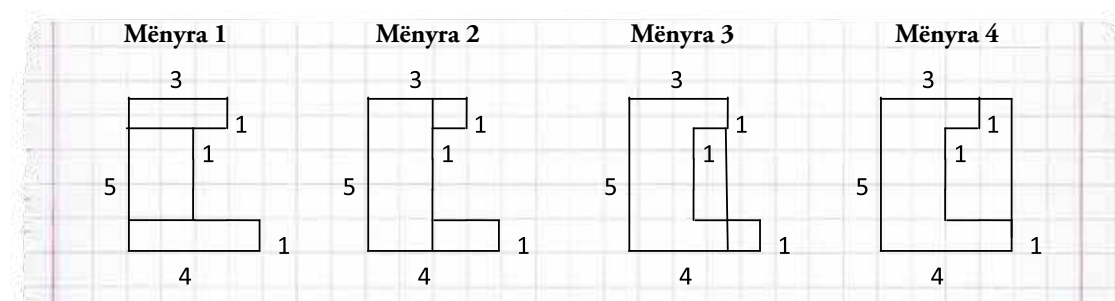
Mësimdhënësi duhet të ketë kujdes me rastin e përgatitjes së pyetjeve. Ato duhet të jenë të qarta, të plota dhe të formuluar drejt. Të gjitha këto elemente ndikojnë që një numër më i madh i nxënësve të përfshihen në procesin mësimor dhe të kontribuojnë me përgjigjet e tyre.

Të nxënës e koncepteve të reja në matematikë shoqërohet me zgjidhjen e shembujve apo detyrave të ndryshme. Zakonisht mësimdhënësit zgjidhin shembuj të ngjashëm duke bërë ndryshime të vogla p.sh. duke ndryshuar vetëm numrat nga ata natyralë, në numra racionalë, dhjetorë, etj. Një gjë e tillë nuk zgjon interesimin e nxënësve për të nxënë, sepse procedurat janë të njëjta. Për ta nxitur kureshtjen e nxënësve për të nxënë, mësimdhënësi duhet të jetë kreativ dhe të zgjedhë shembuj dhe detyra sa më tërheqëse, pikërisht ato që janë në përputhje me interesimet e nxënësve dhe që kanë zbatim në jetën e përditshme. Mësimdhënësi duhet të shfrytëzojë dhe teknologjinë informative dhe të kërkojë nga nxënësit të zgjidhin shembuj dhe detyra përmes shfrytëzimit të faqeve të ndryshme në internet apo softverëve të caktuar, etj. Të gjitha këto elemente e lehtësojnë procesin e të nxënës të nxënësve dhe e bëjnë matematikën më atraktive për ta.

Mësimdhënësi duhet të sqarojë para nxënësve se zgjidhja e detyrave/problemeve matematikore është një proces, i cili fillon me kuptimin e informacioneve që ofrohen në detyrë, me identifikimin e kërkesës që parashtrohet në të dhe me përpjekjen për të shfrytëzuar ato që dimë për të arritur deri te ajo që kërkohet. Nxënësit duhet

të kuptojnë se zgjidhja e detyrave është një proces i vazhdueshëm i kërkimit të mënyrave të zgjidhjes, të të provuarit të tyre, të reflektimit ndaj asaj që arrihet, dhe se në këtë proces përveç sukseseve ata mund të ballafaqohen edhe me “ngecje” ose “dështime”. Është detyrë e mësimit që të vetëdijësojë nxënësit se “pengesat” e tilla mund të tejkalohen dhe që të përkrahë nxënësit në përpjekjet e tyre për të pasur sukses.

Në matematikë ka edhe detyra problemore të cilat mund të zgjidhen në disa mënyra. Kështu p.sh. nëse kërkohet nga nxënësit të njehsojnë perimetrin e shumëkëndëshit të dhënë në figurë, atëherë mësuesi duhet të inkurajojë nxënësit të provojnë mënyrat e ndryshme për gjetjen e tij, si p.sh.



Mënyra 1: $P = 4 + 1 + 2 + 3 + 1 + 1 + 3 + 5 = 20cm$.

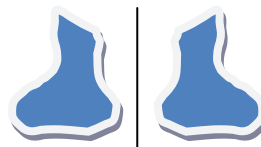
Mënyra 2: $P = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 20cm$.

Mënyra 3: $P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 20cm$.

Mënyra 4: $P = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 = 20cm$.

Gjetja e mënyrave të ndryshme për zgjidhjen e problemeve inkurajon të menduarit e nivelit të lartë të nxënësve, sepse detyrat e tilla i sfidojnë ata për të analizuar marrëdhëniet ndërmjet elementeve të dhëna në problem dhe për të “hulumtuar” modelet e përshtatshme për zgjidhjen e tij.

Në kuadër të detyrave mësimit mund të përfshijë edhe aktivitete praktike të cilat e konkretizojnë një informacion të ri, p.sh. nëse mësuesi duhet të sqarojë simetrinë lidhur me një drejtëz, atëherë ai mund të kërkojë që nxënësit të hedhin pak ngjyrë në një letër dhe ta palosin letrën në dysh. Më pas ta hapin letrën dhe të diskutojnë ato që kanë vërejtur. Vizualizimi ndihmon jashtëzakonisht shumë nxënësit që të kuptojnë nocionin e simetrisë lidhur me një drejtëz dhe që ta mbajnë në mend atë për një kohë të gjatë.



Për të lehtësuar procesin e zgjidhjes së detyrave, mësuesi duhet të shfrytëzojë mundësinë e ilustrimit të detyrës, skicimit të saj apo shfrytëzimit të modeleve të ndryshme që e konkretizojnë atë. Kohëve të fundit, shtimin e interesimit të nxënësve për të zgjidhur detyrat e ka forcuar edhe përdorimi i teknologjisë informative në zgjidhjen e tyre. Kjo është një përparësi që mësuesi duhet ta shfrytëzojë në mënyrë efektive.

7.9. Vlerësimi i të nxënit të nxënësve

Pjesa më e vështirë dhe më delikate e procesit mësimor është vlerësimi. Vlerësimi është i vështirë, sepse gjatë realizimit të tij mësimdhënësi duhet të shqyrtojë jo vetëm përfitimin e njohurive nga ana e nxënësve, por edhe shkallën e përgjithshme të zhvillimit të kompetencave të tyre. Është delikat, sepse me anën e vlerësimit mund të ndikojmë në anën emocionale të nxënësve dhe në “gatishmërinë” e tyre për ta mësuar matematikën, sidomos në këtë moshë kur ata janë ende në fazën fillestare të krijimit të personalitetit të tyre. Përkundër këtyre fakteve, mësimdhënësit duhet ta bëjnë vlerësimin e nxënësve gjatë procesit mësimor.

Ekzistojnë lloje të ndryshme të vlerësimit të nxënësve, të cilat mund të klasifikohen në dy kategori të mëdha: vlerësimi formues (formativ) që realizohet gjatë orëve mësimore dhe ai përmbledhës (sumativ), i cili organizohet pas një periudhe të caktuar kohore. Përdorimi i llojit të parë të vlerësimit ka për qëllim përcjelljen e vazhdueshme të zhvillimit të kompetencave të nxënësve. Përmes tij synohet të identifikohen anët e forta të nxënësve, si dhe vështirësitë me të cilat mund të ballafaqohen ata gjatë procesit mësimor. Nëse identifikohen vështirësitë, atëherë mësimdhënësi mund të bëjë ndryshimet e nevojshme për t’i tejkaluar ato. Ndërsa vlerësimi përmbledhës ka për qëllim të japë informacion të përgjithshëm mbi suksesin e nxënësve gjatë një periudhe të caktuar kohore.

Mësimdhënësit në lëndën e matematikës përveç vlerësimit përmbledhës kanë përdorë edhe vlerësimin formues të nxënësve. Natyra dinamike e zhvillimit të lëndës, kryesisht e bazuar në bashkëveprimin e mësimdhënësit dhe nxënësve në zgjidhjen e shembujve dhe detyrave të ndryshme ka bërë që mësimdhënësit në mënyrë të vazhdueshme të përcjellin përparimin e nxënësve në matematikë. Mirëpo, vlerësimi i bërë brenda orës mësimore ka qenë kryesisht rutinor dhe mësimdhënësi ka qenë i vetmi vlerësues.

Sot, për të zbatuar kornizën e kurrikulit të Kosovës, kërkohet që mësimdhënësit të fokusohen në zhvillimin e kompetencave të të gjithë nxënësve. Për të arritur këtë, mësimdhënësit duhet të jenë të kujdesshëm që në planin ditor të përfshijnë edhe mënyra të ndryshme të vlerësimit, të cilat do t’i ndihmojnë për të vlerësuar jo vetëm njohuritë, por edhe shkathhtësitë dhe shprehitë e nxënësve.

Derisa vlerësimi i njohurive është më i lehtë, dhe mund të realizohet përmes parashtrimin të pyetjeve, angazhimit në zgjidhjen e detyrave, organizimit të testeve dhe detyrave kontrolluese, mbetet detyrë më e vështirë për mësimdhënësit të gjejnë mënyra të përshtatshme për të vlerësuar shkathhtësitë e nxënësve, si p.sh. aftësinë e nxënësve për të menduar në mënyrë kritike, për të zgjidhur detyra, për të hulumtuar informacione, për të përdorur teknologjinë informative, si dhe të shprehive të ndryshme për kryerjen e detyrave individuale, në dyshe dhe në grup. Vlerësimi i këtyre elementeve të nxënësve do të ndihmojë mësimdhënësin të gjykojë për shkallën e zhvillimit të kompetencave të nxënësve dhe të orientojë punën e tij në drejtim të avancimit të tyre.

Mësimdhënësit duhet të jenë kreativ në gjetjen e formave të ndryshme të vlerësimit brenda orës mësimore, të përdorin instrumente të ndryshme për vlerësim, si dhe të përfshijnë nxënësit në procesin e vlerësimit. Përveç formave standarde të vlerësimit të përmendura më sipër, mësimdhënësit mund të përdorin edhe këto forma: angazhimin e nxënësve në krijimin e modeleve (maketeve), në hulumtimin e informacionit në internet, në identifikimin dhe formulimin e shembujve nga jeta praktike në të cilat zbatohen konceptet dhe rregullat matematikore, prezantimi i zgjidhjes së detyrave, pjesëmarrja në diskutime, angazhimi i nxënësve për të ndihmuar shokët/shoqet që kanë vështirësi në të nxënë, etj.

Për të vlerësuar nxënësit në mënyrë sa më objektive, mësimdhënësit duhet të përdorin instrumente të ndryshme të vlerësimit. Përveç instrumenteve standarde që janë testet dhe detyrat kontrolluese, mësimdhënësit është mirë të praktikojnë edhe vlerësimin e dosjes së përgatitur nga nxënësi, vlerësimin e modeleve të përgatitura nga ata (p.sh. ndërtimi i trupave gjeometrikë), realizimi i projekteve dhe prezantimet e tyre, kryerja e detyrave të shtëpisë, etj.

Mësimdhënësi duhet të jetë i kujdesshëm për të vëzhguar çdo angazhim të nxënësve në aktivitete të ndryshme, pa marrë parasysh nëse nxënësi është i përfshirë në to në mënyrë individuale, në dyshe apo në grup. Për të realizuar këtë në mënyrë objektive është mirë që mësimdhënësi të përfshijë nxënësit në procesin e vlerësimit. Kjo mund të realizohet përmes aftësimit të nxënësve për të bërë vetëvlerësim, vlerësim objektiv të punës së kryer nga shoku/shoqja, vlerësimin e punës së bërë në grup, etj. Përfshirja e nxënësve në procesin e vlerësimit ndihmon aftësimin e tyre për të reflektuar rreth punës individuale dhe punës së të tjerëve. Reflektimi ndaj rezultateve të arritura u ndihmon nxënësve që të kenë kujdes në realizimin me sukses të detyrave në të ardhmen.

Realizimi i vlerësimit formues brenda orës mësimore kërkon punë dhe angazhim. Kryerja e tij në mënyrë të vazhdueshme i shërben jashtëzakonisht shumë vlerësimit përmblëdhës, sepse gjatë vlerësimit formues nxënësit përforcojnë njohuritë dhe evidentojnë “zbrazëtitrat”, të cilat duhet t’i plotësojnë. Kjo ndihmon që ata të mos jenë të befásuar gjatë vlerësimit përmblëdhës.

Për të realizuar një vlerësim formues sa më efikas, mësimdhënësi duhet që në planin ditor të shënojë pyetjet që do t’ju parashtrijë nxënësve, shembujt dhe detyrat problemore. Një gjë e tillë e ndihmon atë të parashikojë sasinë e pyetjeve, nivelin e tyre dhe momentet e përshtatshme për t’i drejtuar ato. Përmes pyetjeve mësimdhënësi arrin të kontrollojë të kuptuarit e nxënësve, shkallën e përvetësimit të njohurive nga ana e tyre, si dhe të identifikojë problemet e ndryshme me të cilat mund të ballafaqohen nxënësit gjatë procesit mësimor. Varësisht nga përgjigjet, mësimdhënësi mund të ndryshojë procesin e mësimdhënies në mënyrë që t’ia përshtatë atë mundësive të nxënësve dhe nevojave të tyre. Po ashtu, është me rëndësi që mësimdhënësi të inkurajojë nxënësit për të bërë pyetje. Aftësia e nxënësve për të bërë pyetje “të mira” ofron shumë informacion për nivelin e të menduarit të tyre. Për mësimdhënësit është e njohur shprehja “më mirë një pyetje e mirë, se 10 përgjigje të sakta”. Po ashtu, zgjedhja e shembujve të përshtatshëm ndihmon konkretizimin e koncepteve të ndryshme, gjë e cila lehtëson të kuptuarit dhe të nxënësve informacionit nga ana e nxënësve. Ndërsa, me rastin e planifikimit të detyrave për t’u zgjidhur në klasë, mësimdhënësi duhet të ketë parasysh të caktojë ato detyra të cilat do të jenë në funksion të ndërtimit gradual të njohurive të nxënësve dhe zhvillimit të shkathtësive të tyre.

Për të përcjellur angazhimin e vazhdueshëm të nxënësve në procesin mësimor, mësimdhënësi duhet të përdorë rubrikat e ndryshme, në të cilat shënon aspektet e ndryshme të vlerësimit të punës së nxënësve brenda orës dhe në periudha të caktuara kohore. Mbajtja me rregull e tyre ndihmon jashtëzakonisht shumë në zbutjen e “stresit” që krijohet me rastin e vlerësimit përfundimtar të nxënësve, sepse mësimdhënësit kanë një pasqyrë më të qartë rreth procesit të përfitimit të njohurive nga ana e nxënësve, si dhe zhvillimit të kompetencave të tyre.

Planifikimi i një ore mësimore fillon me hartimin e rezultateve të të nxënësve dhe përfundon me zgjedhjen e mënyrave të ndryshme të vlerësimit. Për të bërë një gjë të tillë nuk ka një formulë standarde. Përvoja në punë, bashkëpunimi me kolegë, pjesëmarrja në programe për zhvillim profesional në vend dhe jashtë, hulumtimi i literaturës janë disa nga elementet që ndihmojnë mësimdhënësin të bëhet “mjeshtër” në profesionin e tij.

7.10. Testi – Instrument vlerësimi

Testimi është njëra nga format më të përhapura të vlerësimit të nxënësve. Në praktikën e tyre, mësimdhënësit e përdorin shumë shpesh testimin, sepse një gjë e tillë ofron mundësinë e vlerësimit objektiv të njohurive të nxënësve, si dhe për një kohë të shkurtë mund të bëhet vlerësimi i të gjithë nxënësve për disa tema, një kapitull apo edhe më shumë. Testimi është formë e vlerësimit objektiv, sepse mësimdhënësi në test ofron detyrat e caktuara për një grup të nxënësve, pikat për vlerësimin e zgjidhjeve të detyrave, si dhe legjendën për rezultatin e arritur. Kjo ofron mundësinë që mësimdhënësi të jetë objektiv në vlerësimin e nxënësve, sepse përmes testit mësimdhënësi vlerëson punën e bërë duke e bazuar në kriteret e vlerësimit të caktuara paraprakisht. Nëse një test është i përpiluar mirë dhe ka të caktuara të gjitha elementet e tij, atëherë llogaritjen e rezultatit mund ta bëjë edhe vetë nxënësi. Testi ofron mundësi që puna e nxënësve të vlerësohet edhe nga mësimdhënësit e tjerë të matematikës duke ofruar objektivitet maksimal në vlerësimin e punës së tyre.

Për të hartuar një test, mësimdhënësi duhet të ketë kujdes që së pari të përgatisë matricën e testit. Kjo matricë përmban temat, përmbajtja e të cilave do të testohet, si dhe numrin e pyetjeve dhe detyrave sipas niveleve të të nxënit dhe temave. Përgatitja e matricës së testit varet nga shumë faktorë, si p.sh. volumi i përmbajtjes që testohet, rëndësia e temave të përfshira në vlerësim, përmbajtja e temave, koha në dispozicion, etj. Një matricë e testit mund të ketë formën:

	NIVELI I ULTË (67 % TË PËRMBAJTJES)	NIVELI I LARTË (33 % TË PËRMBAJTJES)	NUMRI I PYETJEVE DHE DETYRAVE (SIPAS TEMAVE)
Tema 1	3	1	4
Tema 2	2	1	3
Tema 3	2	1	3
Numri i pyetjeve dhe detyrave (sipas niveleve)	7	3	10

Matrica e testit i orienton mësimdhënësit në hartimin e tij. Caktimi i numrit të pyetjeve dhe detyrave sipas njësive mësimore dhe niveleve të të nxënit e lehtëson jashtëzakonisht shumë punën e mësimdhënëseve në përpilimin e testit. Kjo për arsye se, në vend që mësimdhënësi të shqyrtojë njëkohësisht 3 njësi mësimore për të hartuar pyetje dhe zgjedhur detyra të ndryshme, të cilat duhet klasifikuar sipas rëndësisë dhe nivelit të të nxënit, ai fokusohet në hartimin e pyetjeve dhe detyrave sipas njësive mësimore. Dhe pas caktimit të pyetjeve dhe detyrave sipas njësive mësimore, mësimdhënësi duhet të shqyrtojë edhe njëherë testin si tërësi dhe të sigurohet se pyetjet e nivelit të ultë përfshijnë përafërsisht 67% të përmbajtjes së njësive që testohen, ndërsa pyetjet e nivelit të lartë përfshijnë pjesën tjetër të përmbajtjes.

Pas përgatitjes së matricës së testit, mësimdhënësit duhet të kenë kujdes në përpilimin e testit dhe atë jo vetëm nga ana përmbajtësore, por edhe nga ana vizuale. Me rastin e shkrimit të pyetjeve dhe detyrave duhet të përdoren fontet dhe madhësia standarde e shkronjave. Po ashtu, është e këshillueshme që testi të mos jetë i mbingarkuar me tekst dhe mundësisht të përfshihen në të vizatime/ilustrime/grafikë të ndryshëm, të cilat përveç që janë në funksion të sqarimit të problemit i kontribuojnë edhe anës vizuale të testit.

Mësimdhënësit duhet të jenë kreativ në përpilimin e një testi. Ata duhet të përfshijnë në test pyetje dhe detyra të llojeve të ndryshme, të cilat zgjojnë interesimin e nxënësve për t'u përfshirë në realizimin me sukses të kërkesave të testit. Disa nga llojet e pyetjeve dhe detyrave mund të jenë:

1) Detyra ku kërkohet renditja e fjalëve në fjali, psh.

e formës, ku a dhe b , numrat, janë, $\frac{a}{b}$ natyrorë, numra, thyesa, i quajmë.

2) Detyra me plotësim, p.sh.

Numërues i thyesës $\frac{2}{3}$ është numri _____, ndërsa emëruesi i saj është numri _____.
ose

Kur krahasohen me pjesën e plotë, thyesat ndahen në thyesa:

_____.

3) Detyra ku kërkohet të shkruhet një përkufizim, p.sh.

Për të fituar një thyesë të barabartë me thyesën e dhënë _____

_____.

4) Detyra me shoqërim, p.sh.

Në anën e majtë janë dhënë disa thyesa. Shoqëroni ato me thyesat në anën e djathtë që kanë të njëjtën vlerë.

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{9}{21}$

c) $\frac{15}{18}$

d) $\frac{1}{2}$

1) $\frac{4}{8}$

2) $\frac{5}{6}$

3) $\frac{14}{21}$

4) $\frac{3}{7}$

5) Detyra me rrumbullaksim (me alternativa), ku kërkohet rrumbullaksimi i përgjigjes së saktë, p.sh.

Cila nga thyesat e mëposhtme është e barabartë me thyesën $\frac{18}{24}$?

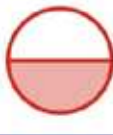
a) $\frac{6}{7}$,

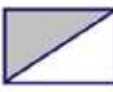
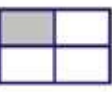
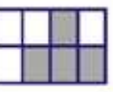
b) $\frac{36}{48}$,

c) $\frac{3}{8}$.

6) Detyra me plotësim të tabelës, p.sh.

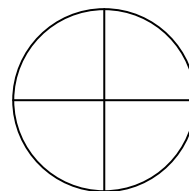
Duke njehsuar plotësoni tabelën

			
10032			
një e plotë			

			
1880			
një e plotë			

7) Detyra me vizatim, p.sh.

Ngjyrosni $\frac{3}{4}$ e figurës së dhënë



8) Detyra me vizatim/konstruktiv, p.sh.

Është dhënë segmenti AB me gjatësi 6 cm.

A _____ B

Vizatoni segmentin me gjatësi sa:

$\frac{1}{2}$ e segmentit AB,

$\frac{2}{3}$ e segmentit AB,

$\frac{1}{6}$ e segmentit AB.

9) Detyra ku kërkohen njehsime të ndryshme, p.sh.

Gjeni vlerën e shkronjave në barazim në mënyrë që të fitojmë barazi të saktë

$$\frac{x}{27} = \frac{4}{3} = \frac{48}{y}, \quad x = \underline{\quad} \text{ dhe } y = \underline{\quad}$$

ose

Njehsoni shumën e thyesave

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \underline{\quad}$$

Llojet e detyrave të mësipërme janë përpiluar për të vlerësuar njohuritë e nxënësve rreth thyesave. Këto lloje të detyrave mund të përdoren edhe në vlerësimin e njohurive të nxënësve rreth temave dhe koncepteve të tjera.

Kjo listë e detyrave nuk është përfundimtare. Mësimdhënësit mund të gjejnë edhe detyra të llojeve të tjera. Varësisht nga temat që përfshihen në test, mësimdhënësit mund të kërkojnë që nxënësit të vizatojnë grafikë të ndryshëm, të zgjidhin detyra me ndihmën e diagrameve, të transformojnë detyrat problemore në “gjuhën algebrë” dhe të zgjidhin ato, të gjejnë shembuj nga jeta ku zbatohen konceptet e ndryshme matematikore, etj.

Pas përpilimit të detyrave, mësimdhënësit duhet të caktojnë pikët për secilën detyrë dhe t’i shënojnë ato anash detyrës. Pikët duhet të caktohen varësisht nga vështirësia e detyrës për t’u zgjidhur. Është e këshillueshme që në këtë nivel pikët për detyra të klasifikohen sipas dy niveleve të të nxënësve. Po ashtu, është mirë që detyrat e nivelit të njëjtë të kenë pikë të njëjta.

Në fund caktohet edhe legjenda e testit, pra notat në varësi të përqindjes së pikëve që kanë fituar nxënësit. Nuk ka rregull që përcakton lidhshmërinë e notave me përqindjen e pikëve të fituara. Kjo më shumë varet nga synimi që ka mësimdhënësi në testimin e nxënësve dhe detyrat që ka përzgjedhur për test. Një legjendë e mundshme e testit mund të jetë p.sh.

PIKËT E FITUARA (TË SHPREHURA NË %)	PIKËT E FITUARA	NOTA
0 - 45	0 - 9	1
46 - 55	10 - 11	2
56 - 75	12 - 15	3
76 - 90	16 - 18	4
91 - 100	19 - 20	5

Pikët e caktuara për secilën detyrë si dhe legjenda e testit janë elementet themelore të cilat e bëjnë testin të jetë instrument për vlerësimin objektiv dhe transparent të nxënësve. Ky objektivitet dhe kjo transparencë vlen për nxënësit, prindërit, strukturat e ndryshme arimore, si dhe palët e tjera me interes.

7.11 Këshilla për mësimdhënës për të inkurajuar nxënësit për të mësuar lëndën e matematikës

Secila klasë në shkollë përbëhet nga nxënës të cilët kanë aftësi dhe prirje të ndryshme për të mësuar lëndët e caktuara. Dallimet e nxënësve në përvetësimin e njohurive dhe shkathhtësive të ndryshme janë sidomos të theksuara në lëndën e matematikës. Në secilën klasë ka një numër shumë të kufizuar të nxënësve të cilët kanë talent në këtë lëndë, një pjesë relativisht e madhe e tyre kanë aftësi mesatare në përvetësimin e saj, ndërsa po ashtu ka edhe shumë nxënës të cilët kanë vështirësi në të mësuarit e matematikës. Duke qenë klasat me një përbërje të tillë, atëherë mësimdhënësit e matematikës kanë qenë të fokusuar që mësimdhënien e tyre ta koncentrojnë kryesisht në zhvillimin e aftësive të nxënësve me aftësi mesatare, duke lënë pak anash punën me nxënësit e tjerë. Derisa zhvillimin e talenteve mësimdhënësit janë munduar ta përkrahin me angazhimin e herë pas hershëm të nxënësve të tillë në zgjidhjen e detyrave të vështira gjatë orës së mësimi ose dhënien e detyrave të tilla për t'u zgjidhur në shtëpi, mësimdhënësit e kanë pasur shumë të vështirë të përfshijnë në procesin mësimor nxënësit që kanë pasur vështirësi në të nxënë. Organizimi i orës mësimore sipas metodologjisë tradicionale ka ofruar shumë pak hapësirë për mësimdhënien që të përfshijë në procesin mësimor të gjithë nxënësit. Zakonisht janë përfshirë nxënësit e talentuar dhe ata me aftësi relativisht të mira në përvetësimin e njohurive dhe shkathhtësive në matematikë, ndërsa të tjerët kanë qenë “nxënësit e heshtur”.

Një heterogjenitet i aftësive të nxënësve të një klase për të përvetësuar lëndën e matematikës ekziston edhe sot. Edhe pse një gjë e tillë e vështirëson punën e mësimdhënësit, ajo nuk duhet t'i dekurajojë ata. Përkundrazi për të arritur sukses në punën e tyre mësimdhënësit duhet të mobilizohen për të kuptuar më mirë aftësitë e nxënësve, stilet e tyre të nxënës, prirjet dhe interesimet e tyre. Njohja e këtyre elementeve dhe organizimi i mësimdhënies dhe të nxënës duke respektuar këto veçori të nxënësve e ndihmojnë mësimdhënien që ta bëjë matematikën sa më atraktive dhe më të lehtë për ta mësuar nga ana e nxënësve.

Një mësimdhënës i kujdesshëm arrin të gjejë mënyra të përshtatshme për të ndihmuar zhvillimin e potencialit të të gjithë nxënësve për të përparuar në të mësuarit e matematikës. Një planifikim i kujdesshëm i orës mësimore, përdorimi i formave të ndryshme të punës, si dhe zbatimi i metodave, teknikave dhe strategjive bashkëkohore të mësimdhënies dhe të nxënës ofron mundësi, që mësimdhënësi:

- të nxitë nxënësit e talentuar të zgjerojnë njohuritë e tyre në matematikë,
- të përkrahë nxënësit me aftësi mesatare të zhvillojnë njohuritë dhe shkathhtësitë e tyre në këtë lëndë,
- të ndihmojnë nxënësit që kanë vështirësi në të nxënë të bëjnë përparim gradual në përvetësimin e koncepteve themelore dhe më pas të motivojnë ata për të vazhduar më tutje me të mësuarit e kësaj lënde.

Përvoja në punë është “këshilltari” më i mirë për të udhëzuar mësimdhënësit si të ofrojnë ndihmë nxënësve me aftësi të ndryshme për të pasur sukses në të nxënës e matematikës. Meqë mësimdhënësit kanë më shumë njohuri për punë me nxënës që kanë aftësi mesatare, atëherë është parë e arsyeshme që në këtë material të ofrohen disa këshilla për mësimdhënës se si të punohet me nxënës të talentuar dhe me nxënës që kanë vështirësi në të nxënë.

Për të inkurajuar të nxënës e nxënësve që kanë talent në matematikë, mësimdhënësit duhet:

- të përgatisin detyra të veçanta, të cilat sfidojnë nxënësit në zgjidhjen e tyre,
- të kërkojnë nga nxënësit që aty ku ka mundësi të zgjidhin të njëjtën detyrë në mënyra të ndryshme,
- të udhëzojnë nxënësit që aty ku ka mundësi të paraqesin zgjidhjen e detyrës në forma të ndryshme,
- të motivojnë nxënësit për të bërë pyetje rreth temave të ndryshme,
- të nxisin nxënësit për të diskutuar rreth koncepteve të ndryshme matematikore dhe për të gjetur argumentet e duhura,
- të angazhojnë nxënësit në krijimin e mjeteve të ndryshme të punës, të cilat ndihmojnë konkretizimin e lëndës,

- të ndihmojnë nxënësit që të përdorin fjalorin e tyre në formulimin e saktë të përkufizimeve, rregullave, etj.
- të inkurajojnë nxënësit që përmes shembujve të formulojnë hipoteza rreth proceseve të ndryshme dhe të gjejnë mënyrat e vërtetimit të tyre,
- të inkurajojnë nxënësit në gjetjen dhe formulimin e shembujve ku kanë zbatim në jetë konceptet dhe rregullat e ndryshme matematikore,
- të nxisin nxënësit për të kërkuar informacione shtesë,
- të këshillojnë nxënësit që të përdorin uebfaqe të ndryshme, të cilat ndihmojnë përforcimin dhe zgjerimin e njohurive të fituara,
- të kërkojnë nga nxënësit realizimin e projekteve të ndryshme nga matematika, si dhe projekteve shumë dimensionale në të cilat së bashku me lëndët e tjera është e integruar edhe lënda e matematikës,
- të angazhojnë ata në rolin e mësimit për të ndihmuar nxënësit që kanë vështirësi në të nxënë,
- të kërkojnë dhe të ndihmojnë nxënësit që të zgjidhin detyra që kanë qenë pjesë e garave të ndryshme,
- të përgatisë nxënësit për pjesëmarrje në gara të ndryshme.

Për të përkrahur të nxënësit e nxënësve që kanë vështirësi në të nxënë e matematikës, mësimit duhet:

- të ofrojë detyra të lehta, të cilat do të motivonin përfshirjen e këtyre nxënësve në procesin mësimor,
- të përgatisin detyra të cilat u përgjigjen aftësive individuale të këtyre nxënësve,
- të përcjellin përparimin gradual të këtyre nxënësve dhe të inkurajojnë cilëndo përpjekje të tyre për të përparuar në matematikë,
- të praktikojnë metoda, teknika dhe strategji të reja të mësimit të cilat mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor,
- të përdorin formën e punës në dyshe, ku ekipi formohet nga një nxënës i suksesshëm dhe një me vështirësi në të nxënë,
- të caktojnë role të ndryshme për këta nxënës për të dhënë kontributin e tyre në realizimin e detyrave në grup (kryerjen e vizatimeve, prezantimin, mbajtjen e shënimeve, etj).
- të përfshijnë nxënësit në diskutime të ndryshme dhe të inkurajojnë ata në dhënien e mendimeve të tyre,
- të inkurajojë këta nxënës për të bërë pyetje për mësimit ose shokët dhe shoqet e tyre,
- të angazhohen në krijimin e modeleve të thjeshta që mund të përdoren për konkretizimin e koncepteve të ndryshme,
- të përdorin vizualizimin me rastin e konkretizimit të koncepteve dhe rregullave të ndryshme,
- të kërkojë që nxënësit për detyrë shtëpie të zgjidhin detyra të lehta,
- të angazhojnë nxënësit në hulumtimin e informacioneve të thjeshta në internet,
- të përgëzojnë nxënësit për çdo sukses të arritur,
- të bashkëpunojnë me prindërit dhe profesionistët e caktuar për të kuptuar psikologjinë e fëmijës dhe për të diskutuar mënyrat më të përshtatshme për ta ndihmuar përparimin e tij në matematikë.

Me siguri që ka edhe shumë këshilla të tjera, të cilat ndihmojnë mësimit si të punojnë me nxënës që kanë aftësi të ndryshme të nxënësit. Si dhe në çdo profesion tjetër, edhe në profesionin e mësimit përvoja është “mësuesi” më i mirë. Gjatë përvojës arrijmë të kuptojmë më mirë individualitetin e nxënësve tanë dhe ta organizojmë procesin mësimor në atë mënyrë që ta përshtatim atë nevojave dhe interesimeve të tyre.

Për të udhëzuar mësimit se si të planifikojnë realizimin e njëjësive mësimore për klasat 1-5 janë dhënë në vazhdim disa mësimore model. Përveç mësimoreve model është dhënë edhe një test model për klasën e V. Më pas është dhënë dhe forma e gatshme për përgatitjen e mësimoreve model.

7.12 Një formë e komunikimit efektiv

Mundësia për ta shprehur një qëndrim, mendim, për të dhënë apo pranuar porosinë realizohet përmes komunikimit.

Komunikimi efektiv në shkollë, si një element i rëndësishëm i kulturës së komunikimit ndërmjet mësimitdhënësve dhe nxënësve përfshin tri elemente:

1. Kanalet, mjetet, mënyrat dhe stilet efektive të komunikimit;
2. Komunikimi efektiv i cili ndihmon në zgjidhjen e problemeve dhe mosmarrëveshjeve në shkollë, dhe i fundit, por jo me më pak rëndësi
3. Të dëgjuarit aktiv të komunikuesit, në rastin tonë të dëgjuarit aktiv të mësimitdhënësve ndaj nxënësve, si dhe të dëgjuarit aktiv të drejtorëve dhe personelit tjetër të shkollës.

Komunikimi efektiv përmirëson dhe avancoon tërë ambientin e nxënies për nxënësit dhe avancoon potencialin mësimor që ka çdo nxënës. Një aftësi e rëndësishme për mësimitdhënësit për ta zotëruar komunikimin është “të dëgjuarit aktiv”. Kur mësimitdhënësit dëgjojnë në mënyrë aktive, fëmijët mund të ndiejnë që janë të rëndësishëm dhe në këtë mënyrë do të kenë vëmendjen e plotë tek procesi i të nxënies. Shumë probleme mund të zgjidhen dhe të parandalohen nëse mësimitdhënësit ndajnë kohën që të dëgjojnë në mënyrë aktive. E rëndësishme është kur mësimitdhënësi është një dëgjues aktiv, kur ai është i gatshëm që t’i udhëzojë nxënësit për zgjidhjen e problemeve për veten e tyre. Janë katër hapa për ta zotëruar këtë aftësi: **Ndalo, Shiko, Dëgjo** dhe **Përgjigju**.

NDALO	Kur një mësimitdhënësnë/nxënësnë ju afrohet me diçka, ndalo dhe kushtoji vëmendje. Duke i kushtuar vëmendje, madje edhe shkurtimisht, i bën folësit të kuptojë që po e dëgjoni dhe që ai është i rëndësishëm.
SHIKO	Sigurohuni që të bëni kontakt me sy me atë që komunikoni. Kjo mund të kërkojë rënien në nivelin e tyre dhe përballje direkte me ta. Një shprehje e fytyrës mund t’i nxisë fëmijët që t’i ndajnë ndjenjat dhe shqetësimet e tyre.
DËGJO	Përqendroni vëmendjen tuaj në atë se çfarë thonë njerëzit me të cilët ju komunikoni, duke i dëgjuar fjalët dhe tonet e tyre. Dëgjoni me kujdes atë çfarë thonë fëmijët në të vërtetë, e gjithashtu edhe atë çfarë përpiqen të thonë. Shprehjet e fytyrës dhe gjuha trupore japin informata të mjaftueshme rreth fjalëve që ju dëgjoni.
PËRGJIGJU	Pasi që jeni ndalur, keni shikuar dhe dëgjuar është koha që të përgjigjeni varësisht nga ajo se çfarë ka thënë nxënësi, një përgjigje aktive do të ishte...

Pastaj vazhdoni me hapat e tjerë të komunikimit.

PARAFRAZO	Çfarë keni dëgjuar (kjo mund të përfshijë ndihmën për nxënësin që të emërtojë ndjenjën e tij/saj ose të përshkruajë një situatë). Kjo e bën folësin të ndihet se është dëgjuar qartë dhe që ndjenjat që i ka shprehur janë të pranueshme.
JEP SHEMBUJ	Kur është e përshtatshme, bëj një pyetje që do të shtyjë nxënësin të mendojë vetë për një zgjidhje ose për hapin e ardhshëm. “Si mund të na siguroni se ju nuk do t’i harroni prapë detyrat e shtëpisë?”, “Çka keni mësuar nga kjo përvojë?”, “Si do ta ndryshonit këtë nëse do ta bënit prapë?”, “Çfarë ju pëlqen më shumë në shkrimin tuaj? Na trego pse?” “Si mund të na siguroni se ju nuk do t’i harroni prapë detyrat e shtëpisë?”, “Çka keni mësuar nga kjo përvojë?”, “Si do ta ndryshonit këtë nëse do ta bënit prapë?”, “Çfarë ju pëlqen më shumë në shkrimin tuaj? Na trego pse?”

7.13 Forma për përgatitjen e mësimit model

Data: _____	Lënda: _____	Klasa: _____
Njësia mësimore (Tema): _____		
Tipi i orës (Rretho):		
a) Zhvillim	b) Përsëritje	c) Ushtrime
ç) Vlerësim	d) Testim	
Mjetet mësimore: _____		
Rezultatet e të nxënit :		
1. _____		
2. _____		
3. _____		
Fjalët kyqe: _____		

Zhvillimi i mësimit

EVOKIMI – E:

REALIZIMI I KUPTIMIT – R:

REFLEKTIMI – R:

Vetëvlerësimi – Analizë e orës së mbajtur:

a) Plotësisht i kënaqur b) I Kënaqur

c) Nuk jam i kënaqur. Nëse nuk jeni i kënaqur, tregoni dy – tri arsye

1. _____ 2. _____ 3. _____

VIII. Modele mësimi për matematikë për klasat 1-5

Klasa: I

Njësia mësimore: Mbledhja e numrave deri në 5 (pesë)

Rezultatet e të nxënës: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- mbledhin dy numra deri në pesë,
- zgjidhin detyra të ndryshme lidhur me mbledhjen e numrave deri në pesë,

Fjalët kyçe: Numri pesë, mbledhja e dy numrave.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, ilustrimet, shkumsat me ngjyra, etj.

Zhvillimi i mësimi

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- Cilët numra kemi mësuar deri tash?

Një nxënës përgjigjet dhe shënon numrat 1, 2, 3, 4 dhe 5 në tabelë.

Më pas, mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit në dyshe të gjejnë objekte dhe gjësende të cilat paraqiten me këta numra. Përgjigjet e mundshme të nxënësve mund të jenë:

- Çdo nxënës ka një emër.
- Çdo fëmijë ka dy duar.
- Çdo stinë ka tre muaj.
- Çdo vit ka katër stinë.
- Dora ka pesë gishta.



Mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- Sa duhet shtuar numrit 1 për të fituar numrin 2? Si mund ta shënojmë këtë?

Një nxënës shënon në tabelë $1+1 = 2$.

Mësimdhënësi/sja paraqet para nxënësve ilustrimin e një dore dhe pyet nxënësit:

- Në një dorë janë ngritur 3 gishta. Nëse i ngrejmë dhe dy gishtat e tjerë, sa gishta të ngritur kemi gjithsej? Si mund ta shënojmë këtë fakt?

Një nxënës shënon në tabelë $3+2 = 5$.

Mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- Cilin veprim kemi zbatuar në dy shembujt e fundit?

Njëri nga nxënësit përgjigjet: Veprimin e mbledhjes së dy numrave.



Realizimi i kuptimit - 25 min

Mësimdhënësi/sja kërkon që një nxënës të dalë para tabelës. Më pas kërkon që para tabelës të dalin dhe tre nxënës të tjerë. Ai/ajo pyet nxënësit:

- Sa nxënës janë para tabelës?

Një nxënës përgjigjet: “Para tabelës janë katër nxënës”. Mësimdhënësi/sja kërkon që ky nxënës të shënojë në tabelë shprehjen për mbledhjen e numrave 1 dhe 3, pra

$$1+3 = 4.$$

Kërkohej që tre nga nxënësit të shkojnë në vend dhe më pas edhe nxënësi që ka mbetur te tabela. Mësimdhënësi/sja kërkon që një nxënës të shënojë shprehjen që tregon se sa veta shkuan në vend, pra

$$3+1 = 4.$$

Më pas, mësimdhënësi/sja vizaton në tabelë tre rreshta me katrorë si më poshtë dhe kërkon që nxënësit me anën e shkumsave me ngjyrë të gjelbër dhe të kuq të ngjyrosin aq katrorë sa paraqesin mbledhorët.

--	--	--	--	--

$$3+2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

--	--	--	--	--

$$1+4 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

--	--	--	--	--

$$5+0 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit në mënyrë të ngjashme si më lartë të ngjyrosin katrorët dhe të plotësojnë katrorët e detyrës 2 në faqen 37 të librit të matematikës për klasën e parë.

Pas përfundimit të detyrës, mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të plotësojnë fushat e mëposhtme sipas lëvizjes në drejtëz,



$$\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Kërkohej që nxënësit në mënyrë të ngjashme të plotësojnë katrorët në detyrën 3 në faqen 37 të librit, të cilat kanë të bëjnë me lëvizjen nëpër drejtëz.

Reflektimi – 10 min

Mësimdhënësi/sja ka përgatitur për secilin grup të nxënësve nga një tabelë si më poshtë. Ai/ajo kërkon që nxënësit në grup të shënojnë në shtyllën e tretë shumën e dy numrave në shtyllat e para.

3	2	5
3	0	
1	2	
2	2	
0	4	

Pas përfundimit të detyrës, disa nxënës do të shënojnë në tabelën e klasës shumat në shtyllën e tretë. Disa prej tyre do të paraqesin rastet e mbledhjes së numrave të mësipërm përmes ushtrimeve me gishtat e duarve.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrën 4 në faqen 37 të librit të matematikës për klasën e I. Përveç kësaj detyre, nxënësit do të formojnë sipas dëshirës detyra për mbledhjen e numrave deri në pesë dhe do t'i zgjidhin ato.

Reflektimi nga përvoja: Në klasën e parë nxënësit fillojnë të ndërtojnë të kuptuarit matematik, prandaj është me rëndësi që mësimdhënësi/sja të kujdeset që të motivojë të gjithë nxënësit për të marrë pjesë aktive në procesin mësimor. Për të përfshirë të gjithë nxënësit në procesin mësimor, mësimdhënësi/sja duhet të planifikojë aktivitete të cilat kërkojnë lëvizje në klasë, vizualizim të koncepteve të paraqitura, si dhe të përdorë një fjalor të përshtatshëm për nxënësit. Pra, ai/ajo duhet të organizojë aktivitete të cilat respektojnë stilet e ndryshme të të nxënësve (kinestetik, vizual dhe auditiv). Në kuadër të kësaj njësie mësimore, nxënësit mund të mësojnë:

- në mënyrë kinestetike duke ngjyrosur katrorët, duke realizuar mbledhjet me lëvizjen e nxënësve para tabelës, si dhe duke mbledhur me anën e gishtave të dorës,
- në mënyrë vizuale përmes ilustrimeve të figurave të ndryshme,
- në mënyrë auditive me anën e dëgjimit të përgjigjeve në pyetjet e parashtruara.

Për të ndihmuar nxënësit në ndërtimin e koncepteve abstrakte në matematikë, mësimdhënësi/sja duhet të përdorë ilustrime të shumta. Kjo ndihmon të kuptuarit e matematikës dhe qëndrueshmërinë e informacioneve të fituara, sepse nxënësit përveç që i dëgjojnë informacionet ata i lidhin edhe me objekte konkrete. Për të sjellur freski në të nxënësve është e këshillueshme që mësimdhënësi/sja të mos punojë vetëm me libër, por të jetë kreativ dhe të përgatisë ilustrime të ndryshme. Ilustrimet mund të shërbejnë për të sqaruar konceptet, ndërsa puna me libër do të shfrytëzohej për të kontrolluar suksesin e nxënësve në përfitim të njohurive.

Aktivitetet e planifikuara për këtë njësi mësimore synojnë zhvillimin e kompetencave të nxënësve që në klasën e parë. Aktivitetet mundësojnë që të nxënësit të zhvillohen:

- kompetenca e komunikimit duke dhënë përgjigje në pyetjet e bëra,
- kompetenca e të menduarit përmes zgjidhjes së detyrave,
- kompetenca e të mësuarit duke zbatuar njohuritë e fituara në zgjidhjen e detyrave të ngjashme,
- kompetenca individuale përmes zgjidhjes së detyrave në librat e tyre,
- kompetenca qytetare duke i organizuar për të punuar në grup.

Klasa: I

Njësia mësimore: Cilindri, koni dhe sfera

■ Rezultatet e të nxënit:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- dallojnë cilindrin, konin dhe sferën,
- të identifikojnë objekte nga jeta që kanë formën e cilindrit, të konit apo të sferës.

Fjalët kyçe: Cilindri, koni, sfera.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, ilustrimet, markerat me ngjyra, modelet e cilindrit, konit dhe sferës, etj.

Zhvillimi i mësimi

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi/sja paraqet para nxënësve modelin e cilindrit. Ai/ajo kërkon që nxënësit në grup të gjejnë objekte që kanë formën e modelit të paraqitur?

Pas disa minutave, mësimdhënësi/sja kërkon që disa nxënës të tregojnë objektet që kanë identifikuar në formën e cilindrit, si p.sh. disa lloje të gotave, disa lloje të vazove të luleve, tubat e ujësjellësit, drurët e prerë, tëholluesi i petëve, shtypësi i asfaltit, shtyllat elektrike, mbajtëset e shenjave të komunikacionit, tapat e shisheve, bateritë, shisheet e disa lëngjeve, etj. Më pas, mësimdhënësi/sja pyet:

- A e dini si quhet ky objekt?

Nëse ka nxënës që e dinë përgjigjen, atëherë njëri nga ata do ta thotë. Në të kundërtën, mësimdhënësi/sja tregon se objekti i paraqitur quhet cilindër.



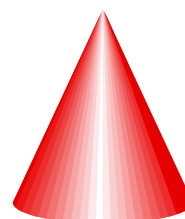
Realizimi i kuptimit - 25 min

Mësimdhënësi/sja vizaton një cilindër në tabelë. Ai/ajo tregon se cilindri është një trup gjeometrik dhe se shumë objekte në natyrë kanë formën e tij. Mësimdhënësi/sja sqaron se cilindri dallon nga kubi dhe kuboidi që kanë mësuar më herët, sepse ai është trup rrotullues. Në këtë moment mësimdhënësi/sja kërkon që të gjithë nxënësit të shqiptojnë emrin e cilindrit së bashku.

Më pas, mësimdhënësi/sja paraqet para nxënësve modelin e konit dhe kërkon që nxënësit në grup të gjejnë objekte në formën e konit.

Pas disa minutave, mësimdhënësi/sja kërkon që disa nxënës të tregojnë objektet që kanë identifikuar në formën e konit, si p.sh. kaushi i akullores, kapuçi i babadimrit, boçat e pishës, karrota, minarja e xhamisë, etj. Më pas, mësimdhënësi/sja pyet:

- Si quhet ky objekt?

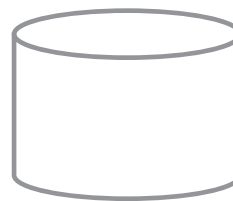
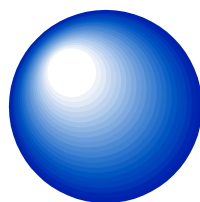
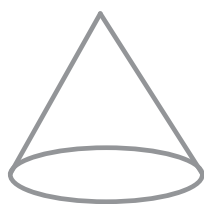


Nëse ka nxënës që e dinë përgjigjen, atëherë njëri nga ata do ta thotë. Në të kundërtën, mësimitdhënësi/sja tregon se objekti i paraqitur quhet kon. Mësimitdhënësi/sja vizaton një kon në tabelë dhe kërkon që të gjithë nxënësit së bashku ta përsërisin emrin e këtij trupi gjeometrik. Në fund tregon se edhe ky trup gjeometrik është trup rrotullues.

Më pas mësimitdhënësi/sja paraqet modelin e sferës dhe kërkon që nxënësit në grup të gjejnë objekte në formën e sferës. Disa nxënës do të tregojnë se cilat elemente i kanë identifikuar, si p.sh. topi, globi, dielli, balonat, koka e njeriut, etj.

Përsëritet i njëjti proces si në rastet e cilindrit dhe konit. Në fund nxënësit shqiptojnë së bashku emrin e këtij trupi gjeometrik.

Mësimitdhënësi/sja paraqet një vizatim në të cilin janë tre trupat gjeometrikë dhe kërkon që një nxënës të ngjyrosë me marker të kuq konin, një tjetër të ngjyrosë me të kaltër sferën dhe i treti të ngjyrosë me të verdhë cilindrin.



Reflektimi – 10 min

Mësimitdhënësi/sja kërkon që nxënësit të zgjidhin detyrën 3 në faqen 83 të librit të matematikës për klasën e I dhe të identifikojnë me të kuqe trupat në formën e sferës, ndërsa më ngjyrë të gjelbër trupat në formën e cilindrit.

Në fund, mësimitdhënësi/sja i këshillon nxënësit:

! MBANI NË MEND

- Trupa gjeometrikë rrotullues janë: cilindri, koni dhe sfera.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrën 4 në faqen 83 të librit të matematikës për klasën e I. Ata do të ngjyrosin me ngjyra të ndryshme figurat në libër që kanë formën e cilindrit, të konit dhe sferës.

Reflektimi nga përvoja: Aktivitetet e planifikuara mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Secili nxënës ka mundësi të identifikojë objekte nga jeta reale të cilat kanë formën e cilindrit, konit dhe sferës. Lidhja e trupave gjeometrikë me objekte nga jeta reale mundëson kuptimin më të mirë të informacionin nga ana e nxënësve, si dhe qëndrueshmërinë e tij. Paraqitja e trupave gjeometrikë me anën e modeleve, vizatimi i tyre, ngjyrosja dhe identifikimi i tyre në grumbullin e objekteve që janë dhënë në libër e bëjnë njësinë mësimore interesante dhe të lehtë për ta përvetësuar.

Meqenëse kjo njësi zhvillohet në klasën e parë dhe emërtimet e këtyre trupave mund të mos jenë të njohur për disa nxënës, atëherë është e preferueshme që Mësimitdhënësi/sja të kërkojë që emrat e tyre të përsëriten nga të gjithë nxënësit në të njëjtën kohë. Kjo do të ndihmojë nxënësit që të mbajnë në mend emrat e tyre për një kohë më të gjatë.

Klasa: II

Njësia mësimore: Zgjidhja e jobarazimeve të formës $x + a > 0$

■ Rezultatet e të nxënit:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- identifikojnë numrat e një bashkësie që janë zgjidhje të jobarazimit,
- shkruajnë bashkësinë e zgjidhjeve të jobarazimit,
- tregojë se jobarazimet mund të kenë më shumë se një zgjidhje,
- zbatojnë jobarazimet e formës zgjidhjen e detyrave nga jeta praktike.

Fjalët kyçe: Jobarazim, jobarazim i saktë, bashkësi e zgjidhjeve të jobarazimit.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, një pako me bonbone, etj.

Zhvillimi i mësimi

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi/sja kërkon që një nxënësi të tregojë numrin e nxënësve në klasë. Një nxënësi përgjigjet p.sh. “Në klasë janë 30 nxënës”. Më pas, mësimdhënësi/sja paraqet para nxënësve një pako me bonbone dhe tregon se ajo ka 24 bonbone. Ai/ajo kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjen:

- Edhe sa bonbone duhet të marrim nga pakoja e dytë ashtu që t’iu ndajmë secilit nxënësi nga një bonbon?

Një nxënësi përgjigjet në pyetjen e dhënë.

Mësimdhënësi/sja shënon detyrën në formën e ekuacionit $24 + x = 30$ dhe kërkon që një nxënësi të zgjidhë detyrën në tabelë. Më pas, mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- Nëse ai/ajo merr më shumë se 6 bonbone nga pakoja e dytë, a do të mund t’iu ndajë të gjithë nxënësve nga një bonbon?

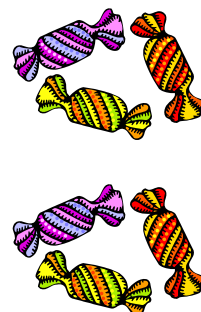
Përgjigjet një nxënësi se nga pakoja e dytë mund të mirren 7, 8, 9, ... ,24 bonbone.

Realizimi i kuptimit – 25 min

Në këtë rast, mësimdhënësi/sja bën përmbledhjen e aktivitetit duke sqaruar para nxënësve, se: “Nëse pakoja përman 24 bonbone, atëherë nga pakoja e dytë duhet të merren x bonbone ashtu që të kemi më shumë se 29 bonbone, në mënyrë që të kemi bonbone të mjaftueshme për t’iu shpërndarë secilit prej 30 nxënësve. Më pas, mësimdhënësi shënon shprehjen për këtë detyrë

$$24 + x > 29.$$

Ai/ajo tregon se shprehja e mësipërme quhet jobarazim.



❶ MËSIMDHËNËSI/SJA TREGON SE NGA PAKOJA E DYTË:

- Nuk mjafton të marrë një bonbon, sepse $24 + 1 > 29$ nuk është jobarazim i saktë.
- Nuk mjafton të marrë 2 bonbona, sepse $24 + 2 > 29$ nuk është jobarazim i saktë.
- Mjafton të marrë 6 bonbona, sepse $24 + 6 > 29$ është jobarazim i saktë.
- Mund të marrë 7 bonbona, sepse $24 + 7 > 29$ është jobarazim i saktë.
- Mund të marrë 8, 9, 10 bonbona, sepse përsëri jobarazimi $24 + x > 29$ është i saktë.
- Mund të marrë deri në 24 bonbona të pakos së dytë, sepse $24 + 24 > 29$ është jobarazim i saktë.

Prandaj, zgjidhja e jobarazimit të mësipërm është $x \in \{6, 7, 8, \dots, 24\}$. Pas sqarimit të bashkësisë së zgjidhjes së jobarazimit, mësimdhënësi/sja bën provën duke shpërndarë nga një bonbon për secilin nxënës. Për të verifikuar të kuptuarit e nxënësve, mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit në dyshe të gjejnë zgjidhjen e detyrës:

Detyrë: Nëse një nxënës është 7 vjeç, atëherë edhe sa vite duhet të presë ai që të ketë më shumë se 10 vjetë dhe më pak se 18?

Mësimdhënësi/sja kontrollon punën e dysheve dhe ofron ndihmë në rast nevojë. Pas zgjidhjes së detyrës nga ana e nxënësve, Mësimdhënësi/sja kërkon që njëri prej tyre të shënojë jobarazimin, ndërsa një nxënës tjetër të shënojë bashkësinë e zgjidhjeve. Pra,

$$7 + x > 10$$

$$x > 10 - 7$$

$$x > 3$$

Bashkësia e zgjidhjeve është $x \in \{4, 5, 6, \dots, 10\}$.

Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të zgjidhin rreshtin e parë dhe të tretë të detyrës 1 dhe pjesën e dytë të detyrës 2 në faqen 73 të librit të matematikës. Në fund, nxënësit do të krahasojnë rezultatet brenda grupit.

Detyra 1. Ngjyrosni me të kuqe numrat për të cilët jobarazimi është i saktë:

- 1) $x > 72 - 29$, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.
- 2) $x > 55 - 38$, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

Detyra 2. Drejtëndëshat e zbrazët plotësoni me ata numra nga bashkësia e dhënë për të cilët do të fitoni jobarazi të saktë. Cilët janë ata numra? Zgjidhjet shënoni brenda rrathëve.

$$\{1, 2, 4, 5\} \quad 14 + \square > 17.$$



Reflektimi – 10 min

Mësimdhënësi/sja formon para tabelës dy grupe me nga 6 nxënës, ndërsa nxënësve të tjerë u thotë të qëndrojnë në fund të klasës. Mësimdhënësi/sja u sqaron nxënësve, se secili grup ka të drejtë të përmendë emrin e një nxënësi që është në fund të klasës dhe të bëjë përshkrimin e tij. p.sh. Luani është i sjellshëm, Teuta është shoqe e mirë etj. Nëse nxënësit që i përmendet emri i pëlqen përshkrimi, atëherë ai bashkohet me atë grup, nëse jo pret përshkrimin që i bëjnë herën tjetër. Grupet duhet të kenë më shumë se 10 nxënës në mesin e tyre. Fitues është grupi që ka mbledhur më shumë nxënës.

Në fund, mësimdhënësi/sja shënon se shprehja për lojën është:

$$6 + x > 10$$

$$x > 10 - 6$$

$$x > 5$$

Pra, grupet është dashur të bindin të paktën 6 nxënës për të qenë në mesin e tyre.

Detyrë shtëpie: Për punë të pavarur nxënësit do të zgjidhin detyrën 3 në faqen 73 të librit të matematikës për klasën e II.

Reflektimi nga përvoja: Meqë nocioni i jobarazimeve është kuptim mjaft i vështirë për t'u sqaruar për nxënësit e klasës së dytë, është e këshillueshme që mësimdhënësi/sja ta ndajë njësinë e jobarazimeve të formës $x + a > b$ dhe $x + a < b$ në dy njësi mësimore. Kjo ofron mundësi që nxënësit të kuptojnë mirë jobarazimet e formës së parë dhe pastaj shumë lehtë të arrijnë të zgjidhin edhe jobarazime të formës së dytë. Nëse synohet që të dy format të sqarohen në të njëjtën ditë, atëherë ekziston rreziku se nxënësit nuk do t'i kuptojnë mirë dhe se do të kenë problem për të bërë dallimin e formave të këtyre jobarazimeve.

Për ta lehtësuar përvetësimin e njohurive për jobarazimet, mësimdhënësi/sja duhet të jetë kreative dhe të gjejë shembuj sa më praktik nga jeta reale, të cilët mundësojnë që ky nocion të paraqitet si pjesë e një problemi, zgjidhjen e të cilin nxënësit mund ta gjejnë edhe me hamendësime. Kjo e bën njësinë mësimore më interesante për nxënës dhe ofron mundësi për përfshirje të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Në këtë njësi mësimore paraqitja e nocionit të jobarazimit të formës $x + a > b$ është bërë përmes një shembulli praktik të sigurimit të bonboneve për nxënësit e klasës. Nxënësit, duke qenë të përfshirë në një situatë me të cilën janë ballafaquar në jetë e kanë më të lehtë të gjejnë zgjidhjen e problemit dhe pastaj të jenë të përgatitur për të kuptuar se situata e tillë paraqet një jobarazim. Po ashtu, aktiviteti me bonbone ofron mundësi për të sqaruar edhe nocionin e bashkësisë së zgjidhjeve të jobarazimit. Ndarja e bonboneve për nxënësit është një motivim për punë të më-tutjeshme për nxënësit.

Meqenëse kuptimi i jobarazimit paraqet problem për disa nxënës, atëherë është mirë që mësimdhënësi/sja të vazhdojë përsëri me një shembull konkret nga jeta, si p.sh. aktiviteti i cili ka të bëjë me vitet e nxënësve dhe nevojën për të pritur për të arritur në moshën më shumë se 10 vite. Shembulli i dytë u shërben disa nxënësve për të përforcuar njohuritë, ndërsa për ata që kanë vështirësi në të nxënë është mundësia e dytë që iu ofrohet për të kuptuar jobarazimet.

Më pas, mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të punojnë dy detyra në libër. Kontrollimi i saktësisë së zgjidhjeve të detyrave nga anëtarët e grupit, ofron mundësi që nxënësit e talentuar t'i ofrojnë ndihmë nxënësve që kanë vështirësi në të nxënë për të korrigjuar ndonjë detyrë që kanë zgjidhur gabim.

Në këtë moshë fëmijët më së miri mësojnë përmes lojës. Prandaj, kulminacioni i kuptimit të jobarazimeve arrihet në fazën e fundit të orës kur loja e fëmijëve është organizuar në atë mënyrë që ajo të paraqitet me një shprehje të jobarazimit. Nuk ka situatë më përfutuese se loja për të sqaruar kuptimet e ndryshme në këtë fazë të zhvillimit psiko-social të fëmijëve. Ky fakt duhet të përdoret sidomos me rastin e sqarimit të temave të vështira, siç është rasti me jobarazimet në klasën e dytë.

Përzgjedhja e aktiviteteve është bërë me qëllim që të nxënësit të zhvillohen shumë kompetenca, si:

- Kompetenca e komunikimit, përmes përshkrimit të shokëve dhe shoqeve,
- Kompetenca e të menduarit duke u përfshirë në zgjidhjen e problemeve,
- Kompetenca e të mësuarit me anën e zbatimit të njohurive në situata të reja, etj.

Klasa: II

Njësia mësimore: Simetria ndaj drejtëzës

■ Rezultatet e të nxënës:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- gjejnë pikën simetrike me pikën e dhënë në lidhje me një drejtëz të dhënë.
- ngjyrosin figurën simetrike me një figurë të dhënë në lidhje me një drejtëz të dhënë.
- vizatojnë drejtëzën e simetrisë së figurave të dhëna.
- identifikojnë profesionet në të cilat përdoret simetria në lidhje me një drejtëz.

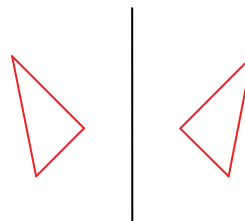
Fjalët kyçe: Pikë simetrike, figurë simetrike, drejtëz e simetrisë.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, dy shirita të kuq të gjatësisë, përafërsisht 3 metra, një metër dhe fleta të përgaditura me figura simetrike.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi/sja ka vizatuar një drejtëz në dyshtemenë e klasës. Kërkon që 3 nxënës të qëndrojnë nga njëra anë e vijës dhe të mbajnë në duar një shirit të kuq duke formuar një trekëndësh. Më pas kërkon që 3 nxënës të tjerë të qëndrojnë përballë nxënësve të parë në anën tjetër të vijës, të larguar njëjtë nga vija. Për t'u siguruar se nxënësit janë njëjtë të larguar nga vija përdoret një metër. Edhe 3 nxënësit e dytë mbajnë një shirit të kuq në duar. Në fund nxënësit lëshojnë shiritat në tokë në formën e trekëndësive me kulme në vendet që kanë qëndruar.



Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të përgjigjen në pyetjet:

- A janë trekëndësat e njëjtë?
- A janë trekëndësat njësoj të larguar nga drejtëza?

Pas përgjigjeve të nxënësve, mësimdhënësi/sja sqaron se figurat e tilla ndryshe quhen *figura simetrike*, ndërsa vija e baraslarguar nga dy figurat quhet *drejtëza e simetrisë*.

Realizimi i kuptimit – 25 min

Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të vendosin lapsin mbi tavolinë dhe të shtrijnë duart mbi bankë ashtu që lapsi të jetë ndërmjet tyre dhe njësoj i larguar nga to.

Ai/ajo pyet nxënësit:

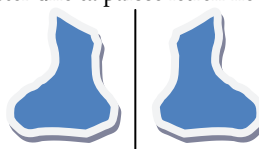
- A janë simetrike duart në lidhje me lapsin?
- Çka paraqet lapsi në këtë rast?

Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të kryejnë detyrën 1 në faqen 75 të librit. Ata duhet të vizatojnë dhe të ngjyrosin figurën simetrike me figurën e dhënë në detyrë. Mësimdhënësi/sja kontrollon punën e nxënësve dhe ndihmon ata që kanë nevojë. Pas përfundimit të detyrës, mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- A janë simetrike fotografitë në detyrën 2?

Më pas mësimdhënësi/sja kërkon që secili nxënës të hedhë pak ngjyrë në një letër dhe ta palosë letrën në dysh. Pasi ta hapin letrën, mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- Çfarë figura fituam? Si i quajmë këto figura?
- A janë figurat të larguara njësoj nga vija e palosjes?
- Si e quajmë vijën palosjes në këtë rast?



Pasi të japin përgjigje, nxënësit do të kryejnë detyrën 3 në faqen 77 të librit. Nxënësit duke ngjyrosur duhet të fitojnë figurat simetrike me ato që janë dhënë në libër.

Mësimdhënësi/sja ka përgatitur për secilin nxënës nga një fletë me figurat e mëposhtme dhe kërkon që nxënësit të vizatojnë drejtëzën e simetrisë për figurat e mëposhtme, apo vijën sipas së cilës këto figura mund të palosen ashtu që pjesët e tyre të përputhen.



Pas përfundimit të detyrës, mësimdhënësi/sja paraqet para klasës shtëpinë e ilustruar më poshtë dhe pyet nxënësit nëse mund të vizatojnë drejtëzën e simetrisë nëpër figurë.

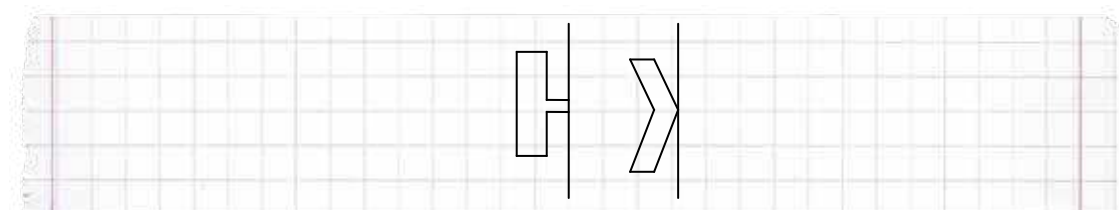


Reflektimi – 10 min

Mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- Cilat shkronja të alfabetit tonë kanë drejtëz të simetrisë?

Pas përgjigjes, mësimdhënësi/sja u shpërndan nxënësve të një grupi nga një fletë në të cilën ka vizatuar gjysmat e shkronjave që kanë drejtëz të simetrisë. Ai/ajo kërkon që nxënësit ta plotësojnë gjysmën tjetër. Pas përfundimit të punës, nxënësit shkëmbejnë fletoret dhe shënojnë një koment në fletoren e shokut/shoqes.



Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të gjejnë objekte të cilat kanë drejtëz të simetrisë. Në fund, ai/ajo kërkon që nxënësit në grup të diskutojnë dhe të gjejnë se në cilat profesione është me rëndësi njohja e simetrisë lidhur me një drejtëz. Një anëtar i grupit tregon profesionet që ka gjetur grupi.

Detyrë shtëpie: Nxënësit duhet të zgjidhin detyrën 3 në libër në faqen 75, si dhe të gjejnë tri objekte në shtëpi të cilat kanë drejtëz të simetrisë.

Reflektimi nga përvoja: Aktivitetet praktike janë shumë të përshtatshme për të sqaruar nocionet e ndryshme në matematikë, sidomos në gjeometri. Prandaj, lëvizja e nxënësve për të sqaruar simetrinë duke përdorë shiritin e kuq, me anën e pozicionimit të duarve, si dhe ilustrimet e gatshme për të vizatuar drejtëzën e simetrisë ndihmojnë jashtëzakonisht shumë që nxënësit të përvetësojnë kuptimin e simetrisë dhe disa nga faktet kryesore lidhur me të, siç janë: figurat e njëjta, largësia e njëjtë nga drejtëza e simetrisë, etj.



Inkurajimi i nxënësve për të identifikuar profesione në të cilat zbatohet simetria nxit interesimin e tyre për të përvetësuar njohuri lidhur me simetrinë, sepse ata vetëm kanë filluar të imagjinojnë rreth profesioneve të ndryshme në këtë moshë.

Klasa: III

Njësia mësimore: Matja e gjatësisë (metri, decimetri, centimetri, milimetri)
Rezultatet e të nxënësve: Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

■ Rezultatet e të nxënësve:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- matin gjatësitë e segmenteve,
- transformojnë njërin njësi matëse në tjetrën.
- zgjidhin detyra të ndryshme lidhur me matjen e gjatësive.

Fjalët kyçe: Gjatësi, metër, decimetër, centimetër dhe milimetër.
Materialet dhe burimet: Libri, tabela, fletoret e nxënësve, një metër dhe një vizore.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi/sja ka përgatitur për çdo dyshe të nxënësve nga një tabelë si më poshtë. Ai/a jo kërkon që nxënësit në dyshe të plotësojnë tabelën e mëposhtme duke bërë matjet e duhura me vizore ose metër.



OBJEKTI	GJATËSIA
Lapsi	
Gishti i madh i dorës	
Pëllëmba e dorës	
Banka e nxënësve	

Derisa nxënësit bëjnë matjet, mësimdhënësi/sja vizaton një tabelë të tillë në tabelën e klasës. Pasi nxënësit të kryejnë matjet, mësimdhënësi/sja kërkon që disa nga ata të shënojnë rezultatet e matjes në tabelën e klasës. Mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- Cilën pikë keni zgjedhur si pikë të fillimit për të bërë matjen?
- Çfarë rezultati do të fitoni, nëse si pikë të fillimit për matje do të zgjedhni pikën tjetër?

Me anën e përgjigjeve arrihet deri te përfundimet se për të matur një gjatësi nuk ka rëndësi se cila është pika e fillimit e matjes dhe cila është pikë e përfundimit, si dhe rezultati është i njëjtë pa marrë parasysh se cila nga skajet e segmentit zgjidhet si pikë e parë e matjes.

Realizimi i kuptimit - 25 min

Mësimdhënësi/sja fokusohet në gjatësinë e lapsit dhe bankës. Rezultatet e matjes p.sh. për lapsin 15 cm dhe për gjatësinë e bankës 125 cm, mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit (duke kujtuar njohuritë e njësive të kaluar) ta shënojnë në formën e zgjeruar duke plotësuar vijat e mëposhtme

15 cm = ____ dm ____ cm.
125 cm = ____ m ____ dm ____ cm.

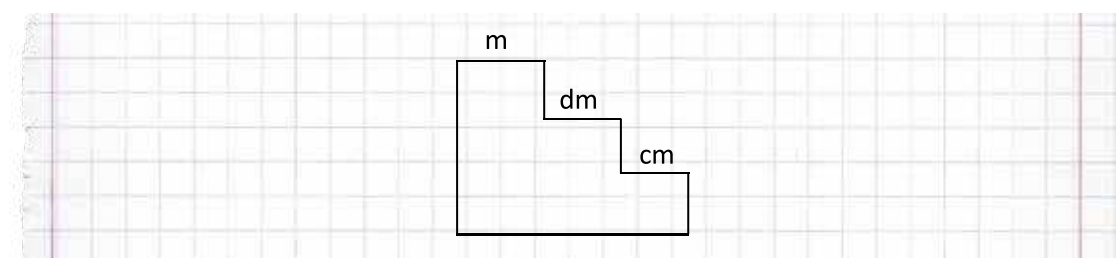


Më pas mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësi të shënojë në cm gjatësinë e një nxënësi, i cili është 1 m e 20 cm, si dhe gjatësinë e pëllëmbës së dorës së tij, e cila është 1 dm e 2 cm :

1 m 20 cm = ____ cm.

1 m 2 cm = ____ cm.

Mësimdhënësi/sja tregon se në njësine e mëparshme mësimore kanë ndërtuar “shkallët”



Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të bashkëpunojnë në grup për të dhënë përgjigje në pyetje:

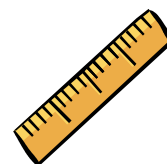
- Po qe se zbresim nga një shkallë, atëherë për sa herë duhet rritur numrin gjatë transferimit në njësine tjetër? Jepni një shembull.

Një nxënës do të përgjigjet dhe do të shënojë shembullin në tabelë. E njëjta procedurë do të përsëritet edhe kur mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

- Po qe se zbresim dy shkallë, atëherë për sa herë duhet rritur numrin gjatë transferimit në njësine tjetër? Jepni një shembull.
- Po qe se ngjitemi nga një shkallë, atëherë si duhet të zërthehet numri ashtu që ta shprehim atë me njësine tjetër? Jepni një shembull.
- Po qe se ngjitemi dy shkallë, atëherë si duhet të zërthehet numri ashtu që ta shprehim atë me njësine tjetra? Jepni një shembull.

Më pas, mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të numërojnë vijat që ekzistojnë në vizore në mes të numrave 0 dhe 1. Përgjigjen e një nxënësi se “ekzistojnë 10 vija” mësimdhënësi/sja e shfrytëzon për të paraqitur njësine e matjes – milimetrin. Ai/ajo tregon se

1 cm = 10 mm.



Në këtë mënyrë mësimdhënësi/sja tregon se në “shkallët” e mësipërme mund të shtohet në fund dhe një shkallë e re mm për të cilën vlejnë të njëjtat rregulla si kur zbresim nga shkallët ose ngjitemi në shkallët e tjera.

Në fund mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të plotësojnë nga dy rreshta të detyrave 2 dhe 3 në faqen 61 të librit të matematikës për klasën e III (nga një rresht është dhënë më poshtë).

Detyra 2. 7 cm = ____ mm, 38 mm = ____ cm ____ mm, 8 cm 3 mm = ____ mm.

Detyra 3. 486 mm = ____ dm ____ cm ____ mm, 3 cm - 5 mm = ____ cm ____ mm.

Nxënësit në grup kontrollojnë detyrat e njëri – tjetrit.

Reflektimi – 10 min

Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit në grupe të bëjnë matjet e disa objekteve në klasë dhe t'i shprehin gjatësitë e tyre me anën e njërive përkatëse.

Grupi I: Do të matin njërën anë të tabelës.

Grupi II: Do të matin gjatësinë e klasës.

Grupi III: Do të matin gjerësinë e klasës.

Grupi IV: Do të matin gjerësinë e dritareve të klasës.

Grupi V: Do të matin gjerësinë e derës së klasës.

Rezultatet do të shënohen në tabelë.

Në fund mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të përdorin adresën <http://www.convert-me.com/en/convert/length> për të bërë shndërrimin e njëres njësi në tjetrën.

Mësimdhënësi/sja pyet nxënësit se cilat janë profesionet në të cilat kërkohet të bëhen matje të gjatësive vazhdimisht. Nxënësit mund të përgjigjen: “Profesionet në të cilat kryhen vazhdimisht matje janë: ndërtimtaria, arkitektura, rrobaqepësia, etj.” Në fund, mësimdhënësi/sja i këshillon nxënësit:

■ Mbani në mend

1m = 10dm; 1dm = 10cm; 1cm = 10mm.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të vazhdojnë zgjidhjen e detyrave 2 dhe 3 në libër. Ata po ashtu do të matin dhe dimensionet e dhomës së ditës ose të ndonjë dhome tjetër që është në formën e drejtkëndëshit.

Reflektimi nga përvoja: Informacioni i paraqitur në libër te kjo njësi mësimore është shumë “i varfër”. Detyrat, me përjashtim të detyrës së katërt, janë shumë mekanike dhe kërkojnë vetëm llogaritje dhe plotësim të katrorëve të zbrazët. Ato janë shumë të ngjashme dhe mund të sjellin monotoni tek nxënësit, sidomos duke pasur parasysh se njësitë paraprake janë të shtjelluara në të njëjtën mënyrë. Duke pasur parasysh se informacioni i ri për nxënësit në këtë njësi mësimore është vetëm kuptimi i milimetrit dhe lidhja e tij me njësitë e tjera matëse, atëherë është e këshillueshme që mësimdhënësi/sja të mos fokusohet vetëm në informacionin që është në libër, por të jetë kreativ dhe të organizojë aktivitete me anë të cilave bëhet përforsimi i njohurive të mësuara më herët, si dhe sqarimi shumë i natyrshëm i njësisë së gjatësisë - milimetrit dhe lidhjes së tij me gjatësitë e tjera. Mësimdhënësi/sja duhet të kujdeset që nxënësit të kuptojnë mirë njësitë e gjatësisë dhe transferimin e tyre, sepse këto informacione do të përdoren me rastin e njehsimit të syprinës së sipërfaqeve së figurave dhe vëllimit të trupave gjeometrikë.

Organizimi i aktiviteteve praktike të cilat kërkojnë matjen e gjatësive të ndryshme mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Ato zgjojnë kërkshirëni e nxënësve për t'u përfshirë dhe për të dhënë kontributin e tyre në realizimin e detyrës. Po ashtu, aktivitetet praktike ndihmojnë që nxënësit të kuptojnë se njohuritë matematikore janë të vlefshme dhe kanë zbatim në jetën e përditshme. Kërkesa që nxënësit të identifikojnë profesione në të cilat bëhen matje të vazhdueshme synon që te nxënësit të zgjojë interesimin për të kuptuar më mirë njësitë e gjatësisë, sepse ato janë shumë të nevojshme për të pasur sukses në shumë profesione, si p.sh. në arkitekturë, ndërtimtari, rrobaqepësi, etj. Meqenëse pjesa më e madhe e informacionit

në këtë njësi mësimore është e njohur nga orët e mëparshme, atëherë është mirë që mësime dhënësi/sja të kërkojë që nxënësit të zgjidhin detyrat dhe të bëjnë matjet duke punuar në dyshe dhe në grupe. Kjo mundëson që nxënësit të mësojnë dhe të përforcojnë njohuritë përmes bashkëpunimit me të tjerët.

Klasa: III

Njësia mësimore: Katërkëndëshi.

■ Rezultatet e të nxënit:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- vizatojnë një katërkëndësh kur janë dhënë kulmet e tij A,B,C dhe D;
- emërtojnë elementet e katërkëndëshit të vizatuar;
- identifikojnë kulmet (brinjët) e përballshme;
- identifikojnë diagonalet e katërkëndëshit.

Fjalët kyçe: Katërkëndësh, brinjë, kulm, diagonale, brinjë të përballshme.

Materialet dhe burimet: Libri, tabela, fletoret e nxënësve, një vizore dhe markera (shkumsa).

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 10 min.

Në fillim të orës, mësime dhënësi/sja kërkon nga një nxënës që të vizatojë një trekëndësh në tabelë, duke shënuar kulmet e tij. Pastaj nga një nxënës tjetër do të kërkojë që të tregojë se sa kulme dhe sa brinjë ka trekëndëshi. Një tjetër do të tregojë sa kënde të brendshme ka trekëndëshi.

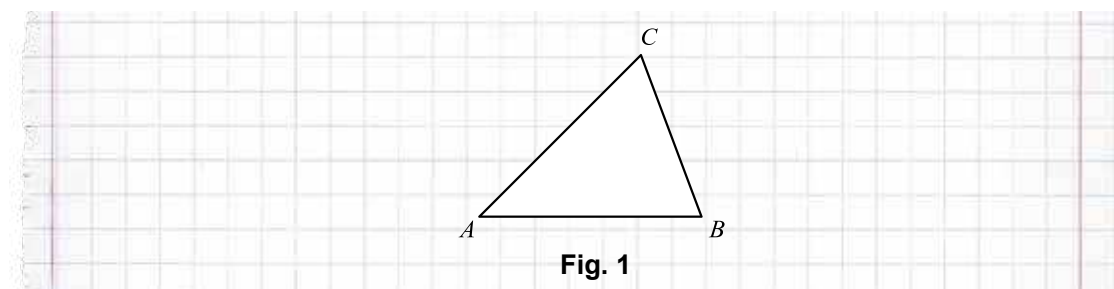


Fig. 1

Pastaj ai/ajo vizaton katër pika në tabelë në mënyrë që asnjë nga tri pikat të mos i takojnë një drejtëze. Nga një nxënës ai/ajo kërkon që në tabelë të konstruktojë segmentet [AB],[BC],[CD] dhe [DA] që përcatokohen nga pikat. Në këtë mënyrë do të fitojmë figurën e katërkëndëshit.

Më pas nxënësve u drejtohem me pyetjen:

- Çfarë figure fituam? Shumica prej nxënësve do të përgjigjen pozitivisht, sepse ata edhe më parë e kanë hasur figurën e katërkëndëshit.

Në këtë mënyrë arrihet deri te paraqitja e qëllimit të orës.

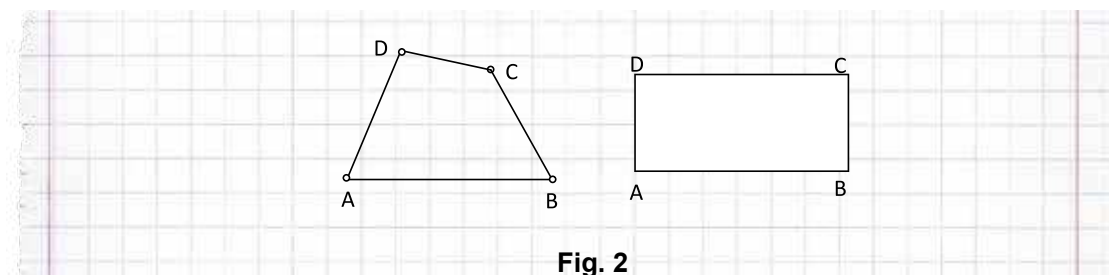


Fig. 2

Realizimi i kuptimit - 30 min.

Pastaj, mësimitdhënësi/sja së bashku me nxënësit konstatojnë se katërkëndëshi është një figurë gjeometrike, e cila ka katër kulme A, B, C dhe D , katër brinjë $[AB], [BC], [CD]$ dhe $[DA]$, dhe katër kënde $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ dhe $\angle DAB$, gjithnjë duke ju kujtuar nxënësve se $\angle DAB = \angle BAD$ (shih kuptimin e këndit).

Në vazhdim, mësimitdhënësi/sja e jep përkufizimin e katërkëndëshit si union të segmenteve $[AB], [BC], [CD]$ dhe $[DA]$. Pra katërkëndshi i përcaktuar me pikat A, B, C dhe D është:

$$[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA] = ABCD$$

Pastaj, mësimitdhënësi/sja vazhdon me njoftimin e nxënësve lidhur me emërtimet që i kemi te katërkëndëshi:

Pikat A, B, C dhe D quhen *kulme* të katërkëndëshit;

Segmentet $[AB], [BC], [CD]$ dhe $[DA]$ quhen *brinjë* të katërkëndëshit;

Këndet $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ dhe $\angle DAB$ quhen kënde të *brendshme* të katërkëndëshit;

Brinjët $[AB]$ dhe $[CD]$ ($[AD]$ dhe $[BC]$) quhen brinjë të *përballshme* të katërkëndëshit;

Kulmet A dhe C (B dhe D) quhen kulme të *përballshme* të katërkëndëshit;

Në vazhdim, mësimitdhënësi/sja nga nxënësit kërkon që të vizatojnë segmentet që përcaktojnë kulmet e përballshme të katërkëndëshit (fig. 3).

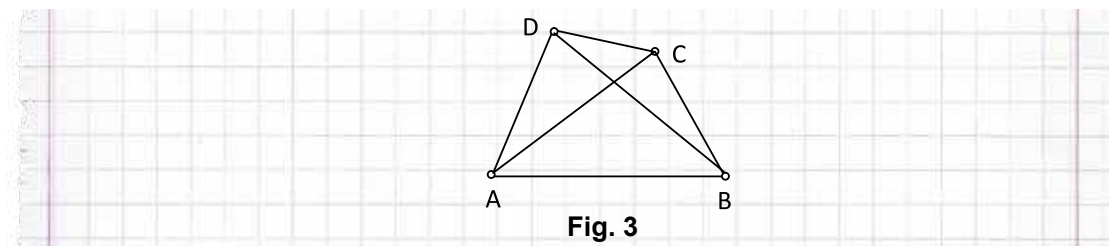


Fig. 3

Pastaj, ai/a jo i njofton nxënësit se këto dy segmente $[AC]$ dhe $[BD]$ quhen *diagonale* të katërkëndëshit dhe kërkon që nxënësit të shprehën me shkrim në fletoret e tyre se çka paraqesin diagonalet e një katërkëndëshi (3-4 min). Pas kësaj kohe, ai/a jo kërkon që 2 nxënës të lexojnë atë që kanë shkruajtur në fletoret e tyre, në mënyrë që mendimet e tyre të krahasohen. Kështu, në klasë do të bëhet një debat i shkurtër rreth saktësisë së të shprehurit të nxënësve. Natyrisht, në fund do të riformulojmë përkufizimin e diagonales si *segment që është i përcaktuar (bashkon) nga dy kulme të përballshme të katërkëndëshit* (fig. 3).

Reflektimi – 5 min.

Për të përsëritur materien lidhur me katërkëndëshin, mësimdhënësi/sja mund ta përdorë teknikën klaster.

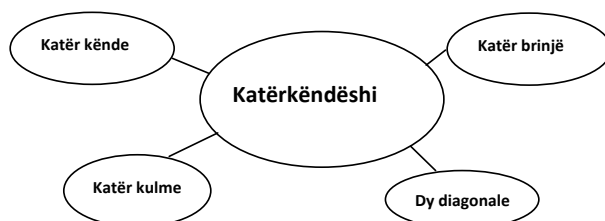


Fig. 5.71

Klasa: III

Njësia mësimore: Paraqitja e të dhënave me diagram

■ Rezultatet e të nxënës:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- klasifikojnë të dhënat sipas vetive të elementeve të populacionit,
- paraqesin me diagram të dhënat e klasifikuara, duke përdorur diagrame të ndryshme.
- bëjnë leximin e rezultateve duke shfrytëzuar diagramet.

Fjalët kyçe: diagram.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, një vizore, 5 markera (shkumësa) me ngjyra të ndryshme.

Zhvillimi i mësimi

Evokimi - 10 min

Në fillim të orës mësimore mësimdhënësi/sja i pyet dy prej nxënësve se sa fëmijë janë në familjen e tyre. Pasi ta marr përgjigjen në këtë pyetje, rezultatin e shënon në tabelë dhe do të vazhdoj me pyetjen tjetër: sa janë djem dhe sa janë vajza dhe përsëri rezultatin e shënon në tabelë. Në këtë mënyrë ai/ajo u bën me dije nxënësve se pyetjet e drejtuara kanë për qëllim studimin e numrit të fëmijëve dhe gjinisë së tyre në familjet e nxënësve. Kështu arrihet deri te paraqitja e qëllimit të orës dhe i njofton nxënësit se gjatë kësaj ore do të mësojnë paraqitjen e rezultateve të një hulumtimi (pra të dhënave) me ndihmën e diagrameve.

Realizimi i kuptimit – 25 min

Paraprakisht, ai/ajo i ndanë nxënësit në grupe me nga 6-7 nxënës dhe në secilin grup cakton nga një nxënës i cili do ta udhëheq hulumtin për grupin e vet. Ai/ajo, nga secili grup kërkon që rezultatet e hulumtimit t'i paraqesin në formë tabelare. Po ashtu ai/ajo cakton edhe një koordinator të hulumtimit. Udhëheqësve të grupeve dhe koordinatorsit u jepen nga një tabelë si tabela. 1, të cilat ai/ajo i ka përgatitur më parë (në shtëpi). Derisa nxënësit punojnë në grupe, ai/ajo vizaton një tabelë si tabela 1 në tabelën e klasës.

Numri i fëmijëve	1		2		3		4		Më shumë se 4		Gjithsej
Gjinia	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	
Nurmi i nx.											
Gjithsej											30

Tab. 1

Pastaj udhëheqësit e grupeve i grumbullojnë rezultatet e hulumtimit dhe pasi t'i kenë mbledhur rezultatet, koordinatori i hulumtimit del në tabelë dhe e plotëson tabelën me të dhëna. P.sh. tabela e plotësuar do të dukej si tab. 2.

Numri i fëmijëve	1		2		3		4		Më shumë se 4		Gjithsej
Gjinia	M	F	M	F	M	F	M	F	M	F	
Nurmi i nx.	3	5	16	14	6	6	4	4	2	3	
Gjithsej	8		15		4		2		1		30

Tab. 2

Këto rezultate janë të shkruara edhe në formularin (tabelën) të cilën e ka plotësuar koordinatori i hulumtimit. Mësimdhënësi/sja fillon t'i paraqes këto rezultate në formën e diagramit, p.sh. me drejtkëndësha (fig. 1).

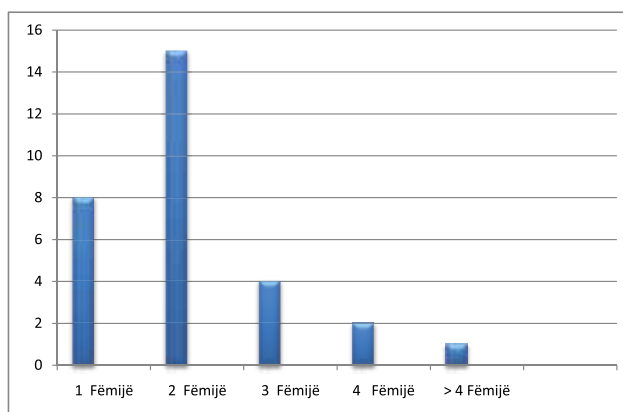


Fig. 1

Pastaj, vazhdon me pyetjen se çka pasqyron ky diagram? Si është ndërtuar ai? A mundemi të shfrytëzojmë edhe ndonjë formë tjetër të diagrameve? Ai/ajo vazhdon duke vizatuar edhe një formë tjetër të diagramit si në figurën e mëposhtme, duke theksuar se ngjyra e kuqe përfaqëson numrin e familjeve me nga dy fëmijë, ngjyra e kaltër numrin e familjeve me nga një fëmijë e kështu me radhë.



Fig. 2

Në fund, ai/ajo vazhdon dhe e paraqet diagramin edhe për të dhënat e tabelës 2.

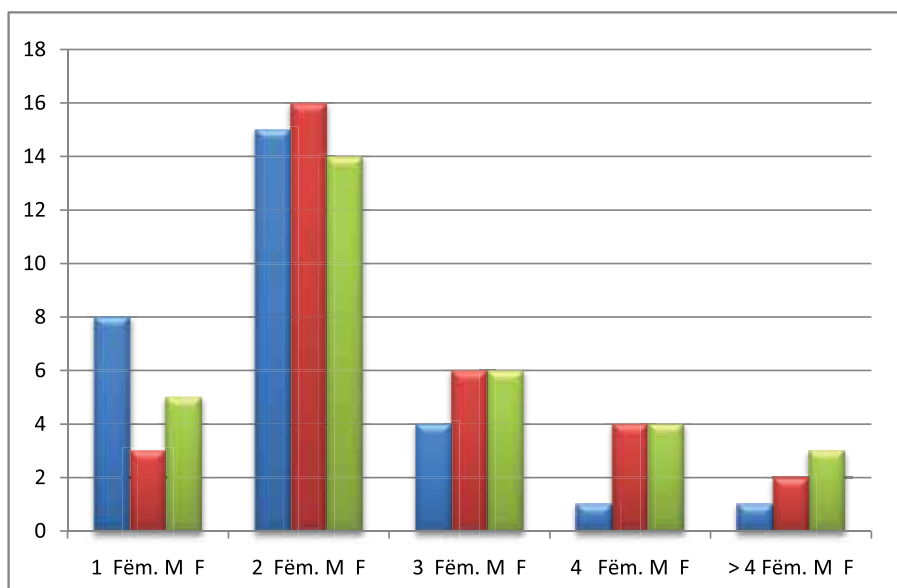


Fig. 3

Në vazhdim, mësimehmëni/sja së bashku me nxënësit i interpretojnë shtyllat e diagramit të fundit, që është më kompleks se ai i pari, sepse këtu kemi grupe me nga tri shtylla. P.sh. nëse e marrim në konsiderim grupin e parë me tri shtylla, përfundojmë se ky grup tregon se kemi gjithsej 8 familje me nga një fëmijë, prej të cilëve 3 janë djem dhe pesë vajza; grupi i dytë i shtyllave: kemi gjithsej 15 familje me nga dy fëmijë, prej të cilëve 16 janë djem dhe 14 vajza, e kështu me radhë.

Reflektim -10 min

Punë në grupe-zgjidhja e detyrës 3, f.124 nga libri i matematikës. Kjo detyrë kërkon që nxënësit të ndërtojnë tabelën dhe diagramin për shtatlartësinë e disa nxënësve, të cilat janë dhënë me fjalë.

Klasa: IV

Njësia mësimore: Zbatimi i shumëzimit – ushtrime

Rezultatet e të nxënit:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- njehsojnë prodhimin e dy numrave,
- zgjidhin detyra të ndryshme nga jeta në të cilat zbatohet veprimi i shumëzimit.

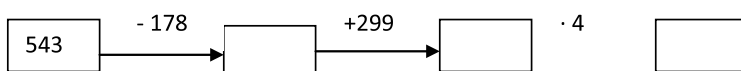
Fjalët kyçe: Faktorët e shumëzimit, prodhimi i dy numrave.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, disa ilustrime, detyra të përgatitura, etj.

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 5 min

Mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit duke përdorë veprimet e mbledhjes, zbritjes dhe të shumëzimit të gjejnë lartësinë e Gjeravicës, majës më të lartë në Kosovë.



Një nxënës do të zgjidhë detyrën në tabelë. Ai/ajo do të tregojë lartësinë e majës së Gjeravicës.

Realizimi i kuptimit - 30 min

Në fillim mësimdhënësi/sja kërkon që nxënësit të bëjnë dallimin ndërmjet kuptimeve "... ka 3 më shumë se ..." dhe "... ka 3 herë më shumë se ...".

Më pas, mësimdhënësi/sja ndan klasën në 6 grupe. Ai/ajo ka përgatitur një kub në të cilin ka shënuar numrat 1 deri në 6. Secili përfaqësues i grupit do të rrotullojë kubin. Nëse numri që bie është nga 1 deri në 5, atëherë ai grup do të zgjidhë detyrën me atë numër. Nëse numri që bie është 6, atëherë secili nga anëtarët e këtij grupi do të zgjedhë njërin nga grupet 1-5 për ta monitoruar gjatë zgjidhjes së detyrës. Nëse njërit grup i bie i njëjti numër (nga 1-5) si ndonjërit nga grupet e mëparshme, atëherë përfaqësuesi i grupit e rrotullon përsëri kubin.

Detyrat që do të zgjidhin nxënësit janë:

Detyra 1. Arbëri ka 75 fotografi të qyteteve të ndryshme të botës. Linda ka 5 fotografi më shumë se Arbëri, ndërsa Fisi 5 herë më shumë se Arbëri. Sa figura të qyteteve ka Linda? Sa figura të qyteteve ka Fisi? Sa figura kanë ata së bashku?



Detyra 2. Nga revistat e ndryshme Teuta ka koleksionuar 134 portrete të këngëtarëve të famshëm. Besniku ka koleksionuar 6 portrete më pak se Teuta, ndërsa Flamuri 6 herë më shumë se Teuta. Sa portrete ka mbledhur Besniku? Sa portrete ka Flamuri? Sa portrete kanë ata së bashku?



Detyra 3. Një kamion bënë furnizimin e 5 shitoreve me qumësht. Çdo ditë të javës shoferi lë në secilën nga këto shitore 10 kuti, secila prej të cilave ka nga 12 litra qumësht. Sa litra qumësht shpërndan shoferi brenda javës?



Detyra 4. Besa sapo i ka mbushur tri vjet. Pas dy viteve, nëna e Besës do të jetë 7 herë më e vjetër se vajza. Sa vjet ka nëna? Sa vjet do të kenë nënë e bijë së bashku pas dy viteve?

Detyra 5. Nxënësit e një klase planifikojnë të shkojnë në një shfaqje për fëmijë. Nëse bileta për shfaqje kushton 2 euro dhe secili nxënës duhet të paguajë transportin urban 50 centë, atëherë sa të holla duhet të mbledhë mësimitdhënësi/sja për 30 nxënësit e tij/saj?

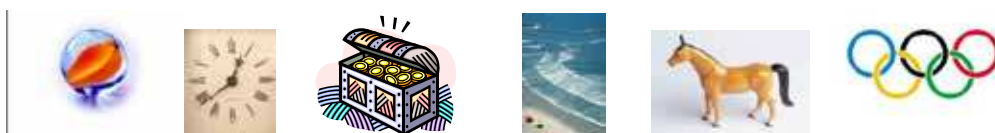


Kur grupet përfundojnë zgjidhjen e detyrës, përfaqësuesi i grupit ngrit dorën për të njoftuar mësimitdhënësin/sen. Pasi të gjitha grupet të zgjidhin detyrat e tyre, mësimitdhënësi/sja kërkon që një përfaqësues i grupit që ka zgjidhur detyrën e parë, të shënojë zgjidhjen në tabelë. Në fund, nxënësi që ka monitoruar punën e grupit tregon për atmosferën që ka ekzistuar në grup gjatë zgjidhjes së detyrës.

E njëjta procedurë do të përsëritet edhe për grupet e tjera.

Reflektimi – 10 min

Mësimitdhënësi/sja kërkon që nxënësit në grup të gjejnë prodhimet dhe të plotësojnë tabelën e mëposhtme në atë mënyrë që nën kolonën e rezultatit të prodhimit të shënohet shkronja e parë e figurës e cila është e shoqëruar me atë rezultat.



$245 \cdot 54 =$ $318 \cdot 11 =$ $806 \cdot 21 =$ $115 \cdot 17 =$ $542 \cdot 94 =$ $902 \cdot 33 =$

50948	3498	13230	29766	1955	16926

Grupi që e gjen i pari zgjidhjen do ta prezantojë atë para të tjerëve. Zgjidhja e detyrës është KOSOVA.

Detyrë shtëpie: Nxënësit do të zgjidhin detyrën 1 dhe 2 në faqen 108 të librit të matematikës për klasën e IV. Përveç detyrës së mësipërme, nxënësit e talentuar do të formulojnë një detyrë me fjalë nga jeta e përditshme ku zbatohet shumëzimi dhe do të zgjidhin atë.

Reflektimi nga përvoja: Aftësimi i nxënësve për të zgjidhur detyrat problemore të cilat janë të dhëna me tekst është sfidë për secilin mësimitdhënë. Për të lehtësuar këtë proces, mësimitdhënësi/sja duhet të ketë kujdes që gjatë ushtrimeve të zgjedhë detyra kreative nga jeta praktike të cilat janë në pajtim me interesimet e nxënësve.

Zgjedhja e detyrave të tilla i ndihmon nxënësit në përvetësimin e njohurive dhe zhvillimin e shkathtësive për t'i zgjidhur ato, sepse paraqesin situata me të cilat ata ose janë ballafaquar në të kaluarën ose situata që ata i vlerësojnë që do të jenë me interes për të ardhmen e tyre. Pikërisht për këtë arsye, detyrat e planifikuara për këtë orë mësimore janë të fokusuara në zgjidhjen e problemeve nga jeta reale. Është e rëndësishme të theksohet se përmes detyrave të ndryshme mësimdhënësi/sja mund të bëjë dhe integrimin e matematikës me lëndët e tjera. Detyra e dhënë në fazën e evokimit mundëson ndërlidhjen e matematikës me lëndën Njeriu dhe natyra.

Aktivitetet e planifikuara gjatë orës mësimore mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin mësimor. Nxënësit e talentuar kanë mundësi të sfidohen përmes shtrimit të detyrave dhe zgjidhjes së tyre, ndërsa ata që kanë vështirësi në të nxënë mund të përfshihen në llogaritje të ndryshme. Po ashtu, plotësimi i tabelës në fund me fjalën e kërkuar mund të zgjojë interesimin e këtyre nxënësve për t'u përfshirë në procesin mësimor. Caktimi i nxënësve të një grupi për të monitoruar punën e grupeve të tjera mobilizon të gjithë nxënësit për të qenë aktiv. Nxënësit që janë në grupe zgjidhin detyra, ndërsa monitoruesit përveç kuptimit të detyrave e ndijnë veten të rëndësishëm, sepse raportojnë për angazhimin e të tjerëve.

Të gjitha aktivitetet e planifikuara synojnë të zhvillojnë te nxënësit disa kompetenca, si:

- Kompetencën e të menduarit përmes shtrimit të detyrave,
- Kompetencën e të mësuarit duke kërkuar zbatimin e njohurive në zgjidhjen e detyrave të shtruara,
- Kompetencën qytetare duke realizuar punën në grupe.

Klasa: IV

Njësia mësimore: Thyesat që tregojnë të njëjtën pjesë të një tërësie.

■ Rezultatet e të nxënës:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- dallojnë pjesët e barabarta të një tërësie.
- gjejnë thyesa të barabarta me një thyesë të dhënë duke shumëzuar si numëruesin ashtu edhe emëruesin me të njëjtin numër të ndryshëm nga zero.
- gjejnë thyesa të barabarta me një thyesë të dhënë duke pjesëtuar si numëruesin edhe emëruesin me të të njëjtin numër të ndryshëm nga zero.

Fjalët kyçe: E tëra (e plotë), thyesa, emëruesi, numëruesi.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, katër sipërfaqe drejtkëndëshe të njëjta prej kartoni, katër palë gërrhëre etj.

Zhvillimi i orës

Evokimi - 10 min.

Mësimdhënësi/sja paraqet qarkun e vizatuar më poshtë dhe i bënë këto pyetje:

- Ç'pjesë e figurës është e hijezuar ?
- Ç'pjesë e figurës është e pahijezuar?
- Ç'farë paraqesin të dy pjesët së bashku?
- Ç'thyesa paraqesin pjesa e hijezuar dhe ajo e pahijezuar? Shënoni ato thyesa ?
- Cilët janë numëruesit e cilët emëruesit e atyre thyesave?



Pas kësaj ai/ajo, së bashku me nxënësit, përfundojnë që:

- Është hijezuar tri të tetat e figurës.
- E pahijezuar është pesë të tetat e figurës.
- Të dy pjesët së bashku paraqesin qarkun i cili është marrë si njësi, d.m.th. paraqesin një të tërë (një të plotë).
- Pjesa e hijezuar paraqet thyesën tri të tetat, kurse pjesa e pahijezuar paraqet thyesën pesë të tetat; thyesat e tilla shënohen me $\frac{3}{8}$ dhe $\frac{5}{8}$, përkatësisht.
- 3 dhe 5 janë numëruesit e thyesave të mësipërme kurse 8 është emëruesi i të dy thyesave.

Realizimi i kuptimit - 20 min.

Nxënësit e klasës ndahen në katër grupe. Secilit grup i jepet nga një sipërfaqe drejtkëndëshe (e njejtë) prej kartoni dhe nga:

- Grupi i parë kërkohet të hijezoj (ngjyros) $\frac{1}{2}$ e sipërfaqes.
- Grupi i dytë kërkohet të hijezoj (ngjyros) $\frac{2}{4}$ e sipërfaqes.
- Grupi i dytë kërkohet të hijezoj (ngjyros) $\frac{3}{6}$ e sipërfaqes.
- Grupi i dytë kërkohet të hijezoj (ngjyros) $\frac{4}{8}$ e sipërfaqes.

Gjatë punës, mësimitdhënësi/sja i kontrollon, ndihmon, udhëzon dhe i këshillon nxënësit (p.sh. që pjesët ndarëse të jenë të barabarta).

Pas punë së kryer, mësimitdhënësi/sja kërkon nga të katër grupet që të presin me gërshërë pjesën e hijezuar të sipërfaqes drejtkëndëshe. Mësimitdhënësi/sja vendos një rën sipër tjetrës pjesët e prera të secilit grup. Bën pyetjet :

- Çfarë janë këto pjesë?
- Ç'tregojnë thyesat e përcaktuara me ato pjesë dhe çfarë janë ato?

Duhet të marrë këto përgjigje:

- Pjesët e fituara janë të puthitshme (kongruente) dhe, si të tilla, kanë syprina të barabarta.
- Ato tregojnë të njejtën pjesë (gjysmën) të një tërësie (sipërfaqes drejtkëndëshe) dhe, si të tilla, paraqesin thyesa të barabarta.

Mësimitdhënësi/sja kërkon nga një nxënës/e që të shkruaj në tabelë (dërrasën e zezë) barazimin e thysave të përcaktuara nga pjesët e hijezuara të sipërfaqeve drejtkëndëshe të secilit grup; nxënësi do të shkruaj barazimet

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}.$$

Tash ai/ajo kërkon nga nxënësit që të shiqojnë emëruesit dhe numëruesit e thysave të mësipërme dhe të tregojnë se si janë fituar ata nga emëruesi dhe numëruesi i thysës së parë? Nxënësit me ndihmën e mësimitdhënësit/es (nëse është e nevojshme) vijnë në përfundim që: *emëruesi dhe numëruesi i thysës së dytë, tretë dhe të katërt fitohen duke shumëzuar, përkatësisht, me numrin 2, 3 dhe 4 emëruesin dhe numëruesin e thysës së parë*. D.m.th.

$$\frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}, \frac{3}{6} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}, \frac{4}{8} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4}.$$

Kështu, nxjerrim këtë rregull:

Për të fituar thyesa të barabarta me thyesën e dhënë, shumëzojmë si numëruesin ashtu edhe emëruesin me të njëjtin numër të ndryshëm nga zero

Mësimitdhënësi/sja kërkon nga nxënësit që vargun e mësipërm të thysave të barabarta ta vazhdojnë edhe me

tri thyesa të tjera; (ato janë: $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ dhe $\frac{7}{14}$; merren nga thyesa fillestare $\frac{1}{2}$ duke shumëzuar numëruesin dhe emëruesin e saj, përkatësisht, me numrat 5, 6 dhe 7). Vargu i zgjeruar është:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14}.$$

Në vazhdim, mësimdhënësi/sja kërkon nga një nxënës/e që vargun e fundit ta shkruaj nga e kundërta:

$$\frac{7}{14} = \frac{6}{12} = \frac{5}{10} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

dhe bën pyetjen se ç'vërejmë me këtë rast? Mësimdhënësi/sja, së bashku me nxënësit, vijnë në përfundim që *secila thyesë fitohet nga thyesa paraprake duke pjesëtuar si numëruesin ashtu edhe emëruesin e saj me pjesëtuesin më të madh të përbashkët të tyre* (që në këtë rast është i barabartë me numëruesin e thyesës paraprake). D.m.th.

$$\frac{7}{14} = \frac{7:7}{14:7} = \frac{1}{2}; \frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2}; \frac{5}{10} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}; \frac{4}{8} = \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2}; \frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{2};$$

Prej këtu, nxënësit me ndihmën e mësimdhënësit/es nxjerrin këtë rregull:

Për të fituar thyesa të barabarta me thyesën e dhënë, pjesëtojmë si numëruesin ashtu edhe emëruesin me të njëjtin numër që është pjesëtues (faktor) i numëruesit dhe emëruesit të thyesës së dhënë.

Reflektimi -15 min.

Nxënësve u jepen për të punuar ushtrimet 3, 4 b), 5, 6. në fq. 146 dhe 147 të librit. Nxënësit punojnë në grupe dyshe me shokun/qen e bankës dhe dikutojnë e ndihmojnë njëri tjetrin gjatë zgjidhjes së detyrave. Mësimdhënësi/sja i kontrollon dhe, nëse ka nevojë, i udhëzon ata /ato gjatë zgjidhjes së këtyre ushtrimeve. Nëse nxënësit gabojnë në plotësimin e vendeve të zbrazta, mësimdhënësi/sja iu rikujton rregullat e nxjerra më sipër për fitimin e thyesave të barabarta në mënyrë që ata / ato t'i zbatojnë për plotësimin e vendeve të zbrazta. Në fund, nxirren katër nxënës që detyrat e zgjidhura në dyshe, t'i zgjidhin në tabelë. Zgjidhjet e fituara diskutohen nga nxënësit tjerë.

Detyrë shtëpie: Ushtrimet 8 dhe 9 në fq 147 të librit.

Klasa: IV

Njësia mësimore: Këndi. Kuptimi dhe elementet

■ Rezultatet e të nxënit:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- emërtojnë elementet e një këndi;
- lexojnë këndet, duke shfrytëzuar krahët dhe kulmin e tij
- sjellin shembuj të këndeve nga jeta e përditshme.

Fjalët kyçe: Kënd, kulm, krahë, sipërfaqe këndore.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, një vizore, një orë muri ose një kompas dhe markera (shkumësa).

Zhvillimi i mësimit

Evokimi - 5 min

Në fillim të orës, mësimitdhënësi/sja kërkon nga një nxënës që të vizatojë një gjysmëdrejtëz në tabelë, duke veçuar pikën e fillimit të saj. Pastaj nga një nxënës tjetër do të kërkojë që të vizatojë edhe një gjysmëdrejtëz tjetër me pikë fillimi po të njëjtën pikë sikur gjysmëdrejtëza e parë (fig. 1).

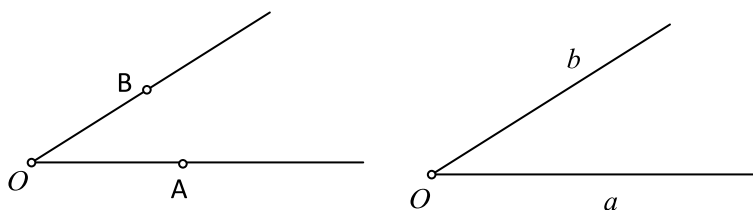


Fig. 1

Pastaj, ai/ajo pyet nxënësit se çfarë figure gjeometrike kemi vizatuar në tabelë? Shumica e nxënësve do të përgjigjen pozitivisht, sepse ata figurën e këndit e kanë hasur edhe në klasët më të ulëta. Në këtë mënyrë arrihet deri te qëllimi i orës mësimore.

Realizimi i kuptimit - 35 min.

Organizimi i realizimit të kuptimit do të bëhet përmes pyetjeve si çka e përbën një kënd? Cilat elemente e

përcaktojnë këndin, duke ardhur deri te përfundimi se:

Këndi është një figurë gjeometrike e cila formohet nga unioni i dy gjysmëdrejtëzave me fillim të përbashkët. Pra

$$\angle aOb = a \cup b$$

Secila prej dy gjysmëdrejtëzave a dhe b quhet *krah* i këndit, kurse pika O quhet *kulmi* i këndit.

Në këtë mënyrë arrihet te përfundimi se për të përcaktuar një kënd duhet ditur kulmin dhe dy krahët e tij.

Meqenëse unioni i bashkësive e gëzon vetinë komutative (ndërrimit të vendeve), d.m.th.

$\angle aOb = a \cup b = b \cup a = \angle bOa$, mësimdhënësi/sja shkruan se:

$$\angle aOb = \angle bOa$$

Tani, duke ditur se gjysmëdrejtëza plotësisht përcaktohet me pikën e fillimit të saj dhe një pikë tjetër, arrihet te përfundimi se këndi është plotësisht i përcaktuar nga kulmi dhe dy pika të cilat u takojnë krahëve të këndit dhe simbolikisht shkruajmë $\angle AOB$ (fig. 5.62). Sipas vetisë së mësipërme, kemi $\angle AOB = \angle BOA$.

Në këtë mënyrë, mësimdhënësi/sja i njofton nxënësit se çdo kënd paraqet një bashkësi të pafundme pikash të cilat u takojnë dy gjysmëdrejtëzave me fillim të përbashkët.

Pastaj kërkon që nxënësit të vizatojnë nga një kënd në fletoret e tyre, duke kërkuar që të specifikojnë elementet.¹

Në vazhdim, ai/ajo i orienton nxënësit drejt sjelljes së shembujve të këndeve nga jeta e përditshme, si p.sh. akrepat e orës, të cilët në çdo moment kohor formojnë një kënd dhe këte e demonstroj praktikisht duke lëvizur akrepat e orës në pozita të ndryshme (fig. 2).



Fig. 2

Pastaj, ai/ajo do të vizatojë disa raste të veçanta të këndeve si: këndin e shtrirë, këndin e drejtë dhe këndin kur të dy krahët përputhen (fig. 5.64).

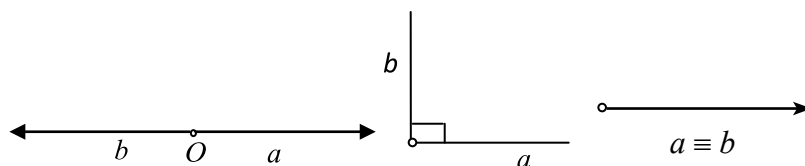


Fig. 3

¹ Duhet patur kujdes që të mos ngatërrojmë këndin me masën e tij. Këndi është figurë gjeometrike, që përbëhet prej pikave, kurse masa është një numër real që i shoqërohet çdo këndi, natyrisht së pari merret këndi njësi.

Pastaj, ai/ajo kërkon nga nxënësit që të sjellin shembuj të këndëve të drejta të cilat mund t'i vërejnë në klasë, si këndi ku bashkohen dy tehet e tavolinës, apo këndi ku bashkohen dy tehe të dyshemesë së klasës etj.

Në vazhdim, ai/ajo vizaton një rrafsh α në tabelë dhe një kënd $\angle aOb = a \cup b$ në rrafshin α . Pastaj, ai/ajo i njofton nxënësit se këndi $\angle aOb$, e ndanë bashkësinë e pikave të rrafshit α në tri nënbashkësi dy nga dy disjunkte (nuk kanë pika të përbashkëta) (fig. 4):

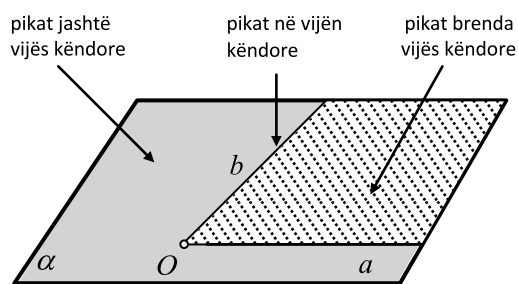


Fig. 4

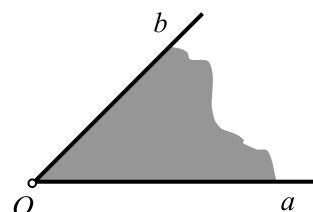


Fig. 5

- Bashkësinë e pikave të cilat ndodhen brenda vijës këndore $\angle aOb$,
- Bashkësinë e pikave të vetë vijës këndore $\angle aOb$ dhe
- Bashkësinë e pikave të cilat ndodhen jashtë vijës këndore $\angle aOb$ (fig. 4).

Ai/ajo vazhdon duke theksuar se unionin e vijës këndore $\angle aOb$ me bashkësinë e pikave të brendshme të tij e quajmë *sipërfaqe këndore* (fig. 5).

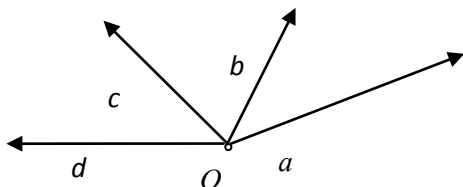


Fig. 6

Reflektimi (5min). Nga nxënësit kërkohet që të emërtojnë të gjitha këndet e mundshme nga figura 6 , duke theksuar kulmin dhe krahët e secilit kënd.

Klasa: V

Njësia mësimore: Pozita reciproke e drejtëzës dhe rrethit

■ Rezultatet e të nxënit:

Në fund të orës mësimore, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- përkufizojnë rrethin,
- identifikojnë elementet e ndryshme të rrethit, si qendrën, rrezen, kordën dhe sekantën e tij,
- dallojnë pozitat reciproke të drejtëzës dhe rrethit në varësi të largesës qendrore të drejtëzës ndaj rrethit,
- konstruktojnë tangjentën e rrethit në një pikë të tij.

Fjalët kyçe: Rreth, rreze e rrethit, kordë, largesë qendrore e drejtëzës ndaj rrethit, tangjentë, sekantë.

Materialet dhe burimet: Libri, fletoret e nxënësve, tabela, një shkop, një gozhdë, kompasi, një unazë, një lupë, etj.

Zhvillimi i mësimin

Evokimi - 10 min

Mësimdhënësi/sja ka ngulur një gozhdë në njërin skaj të një shkopit dhe në skajin tjetër ka lidhur një shkumës. Ai/ajo kërkon që një nxënës të mbajë gozhdën në një pikë të dyshemesë së klasës, ndërsa një nxënës tjetër me shkumësin e lidhur në skajin tjetër të shkopit të vizatojë në dysheme një vijë të mbyllur.



Ai/ajo pyet nxënësit:

- Cila figurë gjeometrike është fituar?
- Si quhet pika në të cilën ka qenë e vendosur gozhdja?
- Çka paraqet gjatësia e shkopit në këtë rast?
- Çfarë mund të thuhet për largësinë e pikave të rrethit nga qendra e tij?
- Si mund të vizatohet një rreth?

Përgjigjet e nxënësve ndihmojnë mësimit/sen që bashkë me ta të arrijnë deri te përkufizimi i rrethit, qendrës dhe rrezes së tij. Më pas, mësimit/senja kërkon që nxënësit të identifikojnë objekte të ndryshme nga jeta të cilat kanë formën e rrethit, si p.sh. unaza, timoni i automjeteve, rrotët e bicikletës, rrathët e lojërave olimpikë, rrathët që krijohen kur hudhet një objekt i vogël në ujë, korniza e syzeve të markës Lenon, korniza e lupës, etj.

Realizimi i kuptimit - 30 min

Kërkohet që nxënësit të vizatojnë me anën e kompasit një rreth në fletoret e tyre. Në të njëjtën kohë mësimit/senja e vizaton një rreth në tabelë. Më pas, nxënësit do të vizatojnë një rreze të rrethit dhe një segment që bashkon çfarë dy pika të tij. Mësimit/senja mund të shfrytëzojë rastin për të sqaruar konceptin e kordës dhe të diametrit të rrethit.

Ai/ajo pyet nxënësit:

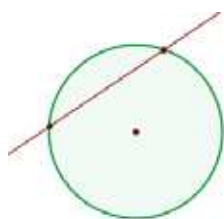
- Çfarë lidhshmërie ekziston ndërmjet rrezes dhe diametrit të rrethit?



Pas dhënies së përgjigjes, mësimit/senja vizaton në tabelë një drejtëz pranë rrethit dhe sqaron konceptin e largesës qendrore të drejtëzës ndaj rrethit.

Mësimit/senja kërkon që nxënësit të vizatojnë tre rrathë në fletoret e tyre dhe tri drejtëza në mënyrë që:

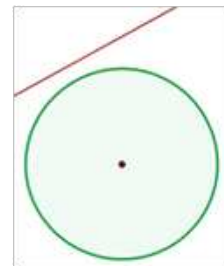
- drejtëza e parë të ketë dy pika të përbashkëta me rrethin e parë,
- drejtëza e dytë të ketë një pikë të përbashkëta me rrethin e dytë,
- drejtëza e tretë të mos ketë asnjë pikë të përbashkët me rrethin e tretë.



$$l(O,r) \cap s = \{A,B\},$$



$$l(O,r) \cap t = \{T\}.$$



$$l(O,r) \cap t = \emptyset.$$

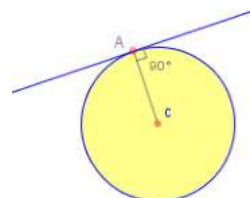
Ndërkohë mësimit/senja vizaton rrathët dhe drejtëzat në tabelë. Nxënësit do të përgjigjen në pyetjen:

- A ka mundësi që një rreth të ketë më shumë se dy pika të përbashkëta me një drejtëz?

Në secilën nga tri pozitat e mësipërme, nxënësit me anën e trekëndëshit kënddrejtë do të vizatojnë nga secila qendër e rrethit segmentin normal në drejtëzën përkatëse. Më pas, ata në grupe do të diskutojnë raportin që ekziston në mes të largesës qendrore të drejtëzës dhe rrezes për secilin nga tri rastet e mësipërme.

Përfaqësuesi i një grupi do të vizatojë segmentin normal nga qendra e rrethit të parë në drejtëz dhe do të shënojë lidhjen që ekziston në mes të largesës dhe rrezes së rrethit, pra $d < r$. Mësimit/senja sqaron se drejtëza s'quhet sekantë e rrethit. Një nxënës i një grupi tjetër do të vizatojë segmentin normal nga qendra e rrethit të dytë në drejtëz dhe do të shënojë relacionin që bën lidhjen ndërmjet largesës dhe rrezes së rrethit, pra $d = r$. Mësimit/senja sqaron se drejtëza t'quhet tangjentë e rrethit. E njëjta procedurë përsëritet për rastin e tretë.

Kërkohej që nxënësit të lexojnë shembullin 5 në faqen 43 të librit, në të cilin përshkruhet mënyra e konstruktimit të tangjentës së rrethit në një pikë të tij. Ata më pas së bashku në grup do të vizatojnë një rreth dhe do të konstruktojnë tangjentën nga një pikë e çfarëdoshme.



Reflektimi – 5 min

Derisa nxënësit lexojnë shembullin, mësimdhënësi/sja vizaton në tabelën e klasës tabelën e mëposhtme. Më pas kërkon që nxënësit të plotësojnë dy rreshtat e tjerë.

POZITA E RRETHIT DHE DREJTËZËS (VIZATIM)	SHËNIMI ME ANËN E SIMBOLEVE	RELACIONI NDËRMJET d DHE r	EMËRTIMI PËR DREJTËZËN
	$l(O,r) \cap s = \{A,B\}$	$d < r$	-

Në fund nxënësit hapin adresën në internet

http://yteach.com/page.php/resources/vieë_all?id=mual_position_line_circle_tangent_centre_origin_radius_r dhe vërejnë edhe njëherë pozitën reciproke të rrethit dhe drejtëzës. Ata shikojnë paraqitjen dhe dëgjojnë materialin në Gjuhën Angleze, gjë e cila i ndihmon ata të përforcojnë edhe të kuptuarit në këtë gjuhë. Mësimdhënësi/sja kërkon që një grup i nxënësve të kapin duart ndërmjet veti dhe të formojnë një rreth para klasës, ndërsa një grup tjetër të kapin duart ndërmjet veti dhe të formojnë një drejtëz. Grupi i nxënësve që ka formuar drejtëzën do të lëvizë ashtu që të paraqesin tri pozitat e mundshme të rrethit dhe të drejtëzës.

Në fund mësimdhënësi/sja i këshillon nxënësit:

■ Mbani në mend

Drejtëza dhe rrethi mund të kenë më së shumti dy pika të përbashkëta.

Detyrë shtëpie: Për punë të pavarur nxënësit do të zgjidhin detyrën 6 nga libri i matematikës për klasën e V.

Reflektimi nga përvoja: Aktivitetet e planifikuara mundësojnë përfshirjen e të gjithë nxënësve në procesin e të nxënësve. Vizatimi i rrethëve, identifikimi i objekteve në formën e rrethit, si dhe plotësimi i tabelës mundësojnë përfshirjen e nxënësve që kanë vështirësi në të nxënë, ndërsa përgjigjet në pyetjet dhe konstruktimi i tangjentës së rrethit në një pikë të tij do të sfidojë nxënësit e talentuar. Në anën tjetër, aktiviteti praktik në fazën e evokimit dhe në reflektim mundësojnë vizualizimin e njohurive të prezantuara. Vizualizimi i realizuar përmes pjesëmarrjes aktive të nxënësve në aktivitet është shumë i rëndësishëm, sepse paraqet formën më të qëndrueshme të përfitimit të njohurive nga ana e nxënësve.



MATEMATIKA DHE MËSIMDHËNIA E MATEMATIKËS UDHËZUES PËR KLASAT 1-5

Përzgjedhja e aktiviteteve për këtë njësi mësimore është bërë me qëllim që të nxënësit të zhvillohen aftësitë e krahasimit dhe analizës së rasteve të mundshme. Në veçanti, tabela e fundit ofron mundësi që nxënësit të sistemojnë në mënyrë të duhur informacionin e fituar. Ndërsa, formimi i tri rasteve të mundshme të pozitës së drejtëzës dhe rrethit me anën e lidhjes së duarve ndërmjet nxënësve është një aktivitet i këndshëm, i lehtë dhe shumë kreativ, i cili në mënyrë jashtëzakonisht të thjeshtë ndihmon nxënësit në përvetësimin e njohurive të prezantuara.

Klasa: V

Njësia mësimore: Prerja e bashkësive.

Rezultatet e të nxënës: Në fund të orës, nxënësit duhet të jenë të aftë të:

- dallojnë (duke hijezuar ose ngjyrosur) prerjen e dy (ose më shumë) bashkësive të dhëna me diagramin e Venit.
- gjejnë prerjen e dy (ose më shumë) bashkësive të dhëna me emërtimin e elementeve të tyre.
- zbatojnë prerjen e bashkësive në gjetjen e bashkësisë së zgjidhjeve të dy (ose më shumë) inekuacioneve.

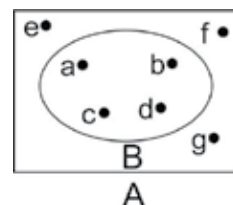
Fjalët kyçe: bashkësi, element, nënbashkësi, prerja e bashkësive, bashkësia e zbrazët.

Materialet dhe burimet: Libri, fletorja e punës, fletoret e nxënësve, tabela .

Zhvillimi i orës

Evokimi - 10 min.

Mësimdhënësi/sja pas kontrollimit të detyrave të shtëpisë (në lidhje me mësimin paraprak - nënbashkësitë), për të përsëritur dhe rikujtuar mësimin e kaluar, vizaton diagramin e mëposhtëm të Venit dhe nxënësve ua bën këto pyetje:

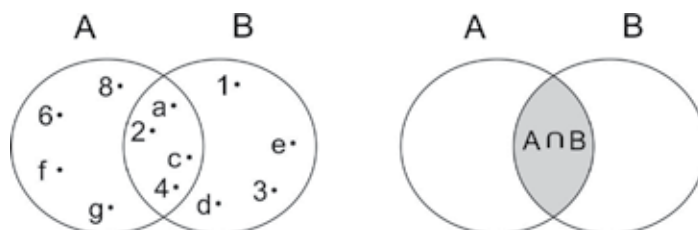


- Cilët janë elementet e bashkësisë B? (Përgjigja: a, b, c, d)
- Si e shënojmë këtë fakt? (Përgjigja: $a \in B$, $b \in B$, $c \in B$, $d \in B$)
- A i takojnë elementet e, f, g bashkësisë B? (Përgjigja: jo).
- Si e shënojmë këtë fakt? (Përgjigja: $e \notin B$, $f \notin B$, $g \notin B$).
- Cilët janë elementet e bashkësisë A? (Përgjigja: a, b, c, d, e, f, g)
- Ç'vëreni? Ç' themi me këtë rast? (Përgjigja: Çdo element i bashkësisë A është element i bashkësisë B; B është nënbashkësi e bashkësisë A).
- Si e shënojmë këtë fakt? (Përgjigja: $B \subseteq A$).

Mësimdhënësi/sja nga nxënësi/ja që e jep përgjigjen e saktë në pyetjet e mësipërme kërkon që atë përgjigje t'a shënojë në tabelë.

Realizimi i kuptimit - 20 min.

Zgjidhen detyrat 1 dhe 2 në fq. 18 të librit. Për zgjidhjen e detyrës 1 mësimdhënësi/sja kërkon nga nxënësit/et që bashkësitë A dhe B të dhëna me diagramin e Venit t'i shkruajnë me anën e elementeve të tyre. Këte e arrin me anën e pyetjeve:



- Cilët janë elementet e bashkësisë A?
- Cilët janë elementet e bashkësisë B?

Nxënësin/en që jep përgjigjen e saktë : 6, 8, 2, 4, a, c, f, g , përkatësisht, 2, 4, a, c, 1, e, 3, d (radhitja nuk ka rëndësi), e nxjerr në tabelë që të shënoj bashkësinë A përkatësisht B, me ato elemente; nxënësi/ja do të shënojë:

$$A = \{a, c, f, g, 2, 4, 6, 8\}, B = \{a, c, d, e, 1, 2, 3, 4\}.$$

(Ndonëse rradha e elementeve në shënimin e bashkësisë nuk është e rëndësishme, për shkaqe estetike, mësimdhënësi/sja e këshillon nxënësin/en që së pari të shënoj shkronjat në radhën e tyre alfabetike e pastaj numrat nga më i vogli deri të më i madhi).

Pas kësaj, mësimdhënësi/sja bën pyetjen:

- Cilët janë të gjitha elementet e përbashkëta të bashkësive A dhe B?

Pasi që nxënësit do të shikojnë diagramin e Venit si dhe shënimet e mësipërme të bashkësive A dhe B, pa vështirësi, do të konstatojnë që a, c, 2, 4 janë elementet e përbashkët të bashkësive A dhe B.

■ Mësimdhënësi/sja do të përfundoj:

Bashkësia e të gjitha elementeve të përbashkët të bashkësive A dhe B quhet prerje e bashkësive A dhe B dhe shënohet me $A \cap B$.

Prandaj, nga shembulli i mësipërm, përfundojmë që: $A \cap B = \{a, c, 2, 4\}$.

Mësimdhënësi/sja kërkon nga nxënësit që të gjyrosin me të verdhë (hijezojnë) pjesën e diagramit të Venit që paraqet prerjen $A \cap B$ të bashkësive A dhe B (në figurën e dytë të mësipërme), dhe kërkon nga nxënësit që të tregojnë se cila është vetia e përbashkët (karakterizuese) e elementeve të bashkësisë $A \cap B$. Pasi që të merr përgjigjen që: elementet e prerjes $A \cap B$ janë elementet që i takojnë bashkësisë A dhe bashkësisë B, mësimdhënësi/sja e shënon këtë fakt me

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ dhe } x \in B\}.$$

Në vazhdim, nga nxënësit/et këkohet që bashkësitë $A = \{2, 3, 4, 5\}$ dhe $B = \{a, b, c, d\}$ t'i paraqesin me diagramin e Venit dhe të gjejnë prerjen e tyre (shembulli 4, fq.19). Nxënësit/et duhet të vërejnë që bashkësitë e tilla nuk kanë elemente të përbashkëta, prandaj prerja e tyre është bashkësi e zbrazët, fakt ky që shënohet me $A \cap B = \emptyset$.

Mësimdhënësi/sja konstaton që:

Dy bashkësi A dhe B që nuk kanë elemente të përbashkëta, d.m.th. të tilla që $A \cap B = \emptyset$, quhen bashkësi disjunkte (joprerëse)

Që nxënësit/et të zbatojnë prerjen e bashkësive, kërkohet nga ata të gjejnë bashkësinë e zgjidhjeve të përbashkëta të inekuacioneve $x \leq 7$ dhe $4 \leq x \leq 10$ (krahasoni me shembullin 3, fq. 18). Për të realizuar këtë qëllim, mësimdhënësi/sja pyet nxënësit:

1. Cilat janë zgjidhjet e inekuacionit $x \leq 7$? (Duke sqaruar, nëse është e nevojshme, që zgjidhje të atij inekuacioni janë të gjithë numrat (natyrorë) më të vegjël ose të barabartë me 7, nga nxënësit duhet të nxjerrë përgjigjen e saktë: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Nxjerr një nxënës në tabelë dhe kërkon nga ai të shënojë me A bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $x \leq 7$, d.m.th,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

2. Ngjashëm veprohet edhe me zgjidhjet e inekuacionit (të dyfishtë) $4 \leq x \leq 9$. Një nxënës/e tjetër do të shënojë në tabelë bashkësinë B të zgjidhjeve të këtij inekuacioni:

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

3. Mësimdhënësi/sja pyet në vazhdim: Cilat janë zgjidhjet e përbashkëta të inekuacioneve të dhëna? Duhet të marrë përgjigjen se ato janë elementet e përbashkëta të bashkësive A dhe B, d.m.th. elementet e bashkësisë $A \cap B$, kështu që,

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{4, 5, 6, 7\}$$

është bashkësia e zgjidhjeve të përbashkëta të inekuacioneve të dhëna.

Reflektimi -15 min.

Në mënyrë që të përforcohen njohuritë e fituara në fazën e mëparshme të orës, nxënësit ndahen në tri grupe dhe nga

- grupi i parë kërkohet të zgjidhë detyrën 2, fq. 18 (të gjejë bashkësinë e të gjithë pjesëtuesve të përbashkët të numrave 18 dhe 24);
- grupi i dytë kërkohet të zgjidhë detyrën 5, fq.19 (të gjejë prerjen e tri bashkësive $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dhe $C = \{0, 2, 4, 7, 10\}$).
- grupi i tretë kërkohet të zgjidhë detyrën 6 në fq. 19 (të tregojnë se çka paraqesin pjesët e ngjyrosura me të verdhë në katër diagramet e Venit).

Nxënësit lihen të punojnë në grup, duke u konsultuar në mes veti, 6-8 minuta. Në ndërkohë, mësimdhënësi/sja i kontrollon dhe, në rast nevojë, i këshillon ata se si të vijnë deri te zgjidhja e drejtë e detyrave. Më pas, përfaqësuesi i secilit grup, paraqet zgjidhjen e fituar, duke e shënuar atë në tabelë. Zgjidhjet e tilla diskutohen edhe nga nxënësit e grupeve të ndryshme.

Detyrë shtëpie: Ushtrimet 7 në fq. 19 të librit si dhe ushtrimi 2 në fq.12 të fletores së punës.



MATEMATIKA DHE MËSIMDHËNIA E MATEMATIKËS
UDHËZUES PËR KLASAT 1-5

Një model testi për vlerësimin e njohurive të nxënësve për kapitullin

Thyesat

MATEMATIKA

Klasa e pestë

Test përmbledhës për thyesat

Emri dhe mbiemri: _____

Koha e punës: 45 min

Klasa: _____

Numri i pikëve: 20

1. Renditni fjalët në fjali

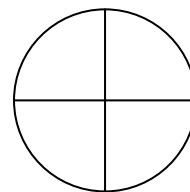
e formës, ku a dhe b , numrat, janë, $\frac{a}{b}$, natyrorë, numra, thyesa, i quajmë.

(1 pikë)

2. Numërues i thyesës $\frac{2}{3}$ është numri _____, ndërsa emëruesi i saj është numri _____.

(1 pikë)

3. Ngjyrosni $\frac{3}{4}$ e figurës së dhënë



(1 pikë)

4. Është dhënë segmenti AB me gjatësi 6 cm. Vizatoni segmentin me gjatësi sa:

A _____ B

Vizatoni segmentin me gjatësi sa:

a) $\frac{1}{2}$ e segmentit AB,

b) $\frac{2}{3}$ e segmentit AB,

c) $\frac{1}{6}$ e segmentit AB,

d) $\frac{5}{6}$ e segmentit AB,

(2 pikë)

5. Për të fituar një thyesë të barabartë me thyesën e dhënë duhet _____
_____ të ndryshëm nga zeroja.

(2 pikë)

6. Në anën e majtë janë dhënë disa thyesa. Shoqëroni ato me thyesat në anën e djathtë që kanë të njëjtën vlerë.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| a) $\frac{2}{3}$ | 1) $\frac{15}{18}$ |
| b) $\frac{4}{8}$ | 2) $\frac{14}{21}$ |
| c) $\frac{9}{21}$ | 3) $\frac{1}{2}$ |
| d) $\frac{5}{6}$ | 4) $\frac{3}{7}$ |

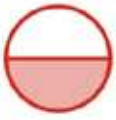
(2pikë)

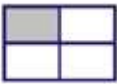
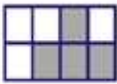
7. Cila nga shumatat e mëposhtme është e barabartë me thyesën $\frac{18}{24}$?

- a) $\frac{6}{7}$, b) $\frac{36}{48}$, c) $\frac{3}{8}$.

(1 pikë)

8. Duke njehsuar plotësoni tabelën.

			
10032			
një e plotë			

			
1880			
një e plotë			

(6 pikë)

Kryeni veprimet me thyesa:

a) $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \text{---}$	c) $\frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \text{---}$
b) $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \text{---}$	d) $\frac{5}{12} - \frac{1}{8} = \text{---}$

(4 pikë)

Legjenda e testit:

Rezultati i pikëve të grumbulluara:

PIKËT E FITUARA	NOTA
0 - 9	1
10 - 11	2
12 - 15	3
16 - 18	4
19 - 20	5

Literatura

1. Kurtis Meredith, Jeannie Steele: Klasat e mrekullisë dhe mençurisë; leximi, shkrimi dhe të menduarit kritik për shekullin 2, Corwin, 2011
2. Ministria e Arsimit, Shkencës dhe Teknologjisë, Korniza e kurrikulit të Kosovës, MASHT, 2011
3. R. Zejnullahu, R. Gjergji, A. Zejnullahu, R. Limani: Matematika për klasën IX, Prishtinë, 2008.
4. J. A. Van de Walle, Matematika për shkollën fillore dhe të mesme të ulët – Mësimi zhvillimor, Pearson Education, Inc Boston, 2007.
5. Bardhyl Musai dhe të tjerë: Mësimdhënia dhe të nxënësit ndërveprues; Cikli fillor, klasat 1-5, Qendra për Arsim Demokratik, 2005
6. Alan Crawford dhe të tjerë: Strategjitë e mësimdhënies dhe të nxënimit për klasat mendimtare, Instituti për Shoqëri të Hapur, 2005
7. Stephen Adam: Përdorimi i rezultateve të të nxënimit, Conference paper “United Kindom Bologna Seminar, 2004
8. Eda Vula, Melinda Mula: Strategji të reja të mësimdhënies dhe të nxënimit në lëndën e matematikës (dispensë e zhvilluar në kuadër të projektit TEMPUS, 2004)
9. Melinda Mula dhe të tjerë: Modele të mësimdhënies sipas strukturës ERR, Qendra për Arsim e Kosovës, 2003
10. Bardhyl Musai: Metodologjia e mësimdhënies, Pegi, 2003
11. Kurtis Meredith, Jeannie Steele dhe Charles Temple: Udhëzuesit e programit “Zhvillimi i mendimit kritik gjatë leximit dhe shkrimit”, Autorët, 1998
12. I. Dresler, E. P. Keenan, Matematika e integruar, Amso School Publications, Inc. New York, 1989;
13. Ramadan Zejnullahu, Sejdi Bilalli: Matematika për klasën e 1, Dukagjini 2008
14. Ramadan Zejnullahu, Sejdi Bilalli: Matematika për klasën e 2, Dukagjini 2008
15. Ramadan Zejnullahu, Sejdi Bilalli: Matematika për klasën e 3, Dukagjini 2009
16. Ramadan Zejnullahu, Sejdi Bilalli: Matematika për klasën e 4, Dukagjini 2010
17. Ramadan Zejnullahu, Sejdi Bilalli: Matematika për klasën e 5, Dukagjini 2010



